

# 非均匀微极介质的有效性质分析\*

胡更开 刘晓宁 荀 飞

北京理工大学理学院力学系, 北京 100081

**摘要** 首先讨论了不同尺度关系下宏细观过渡方法, 然后重点介绍了尺度关系满足  $L \gg l \gg A \approx l_m$  时 (适用于金属基复合材料, 泡沫基复合材料和纳米复合材料等), 构元材料看作微极介质, 而均质化后的材料仍可看作传统 Cauchy 介质时的解析弹塑性细观力学方法. 在这样的理论框架下, 细观结构的尺度影响可作为变量引入细观力学模型, 并且当  $A \gg l_m$  时, 该方法自然退化成传统的细观力学方法.

**关键词** 微极介质, 复合材料, 细观力学, 弹塑性, 尺度效应

## 1 引言

细观力学的主要任务是建立非均质材料宏观有效性质与材料微观结构参数的定量联系, 这方面的工作是材料设计和优化的关键. 近半个多世纪以来, 细观力学得到了较快的发展, 并一直成为近 10 年来固体力学研究方面最为活跃的领域之一<sup>[1]</sup>. 有关细观力学的系统讨论可参见最近的专著如: Torquato<sup>[2]</sup> 着重从描述材料的微结构的关联函数出发, 讨论了有效性质与微观结构的关系; Milton<sup>[3]</sup> 着重从有效性质的精确关系来讨论复合材料的有效性质; 以及 Namat-Nasser 和 Hori<sup>[4]</sup> 及 Mura<sup>[5]</sup> 有关细观力学的经典专著. 有关细观力学经典的综述性文章有 Willis<sup>[6]</sup> 关于界限的讨论, Hashin<sup>[7]</sup> 在 JAM 创刊 50 周年上关于细观力学的综述, 以及近期 Nan<sup>[8]</sup>, Torquato<sup>[9]</sup>, Buyachengko<sup>[10]</sup> 对细观力学的讨论. 我国学者也在细观力学方面有着重要的贡献, 关于细观力学的专著有: 王自强和段祝平<sup>[11]</sup>, Yang 和 Li<sup>[12]</sup> 的有关塑性细观力学的工作, 杜善义和王彪<sup>[13]</sup> 的复合材料细观力学; 余寿文和冯西桥<sup>[14]</sup> 关于微裂纹损伤材料的专著等. 有关中文的细观力学综述可参见文献 [15, 16].

上述细观力学方法是假设存在这样一个代表单元, 在一定特殊边界条件下 (均匀应力或应变), 代表单元的平均性质被认为是代表单元所代表复合材料的有效性质. 另外还假设代表单元内构元材料可以连续化为 Cauchy 介质 (即任何一点没有微观结构, 它的变形可由 3 个位移变量描述, 任何一个微元表面只传递力不传递力偶), 并且认为非均质代表单元均质化后仍然可以看成为 Cauchy 介质. 这样的做法是有条件的, 即要满足一定的尺度关系. 如图 1, 图 2 所示, 均质化过程中的几个重要尺度如结构尺度  $L$ , 代表单元尺度  $l$ , 夹杂的特征尺度  $A$  和基体材料的特征尺度  $l_m$ , 对于不同的研究问题, 它们之间会存在不同的关系.

对于不同的尺度关系, 同一材料的连续化需要采取不同的模型. 比如考察图 1 的夹杂与基体特征长度的关系, 当夹杂尺度远远大于基体特征尺度时 (为了便于理解假想基体材料是多晶材料, 基体的特征长度是晶粒的尺度), 它周围的基体可以用一个连续化的均匀 Cauchy 介质模型来描述, 均匀化后的基体介质具有多晶材料的平均性质. 如考察图 3(b) 均匀化后基体中  $B$  点, 这时该点的应力应变关系是代表具有微观结构基体 (多晶) (图 3(a)) 的平均性质.

收稿日期: 2003-01-16, 修回日期: 2003-09-03

\* 国家自然科学基金 (19802003) 及国家杰出青年基金 (10325210) 资助项目

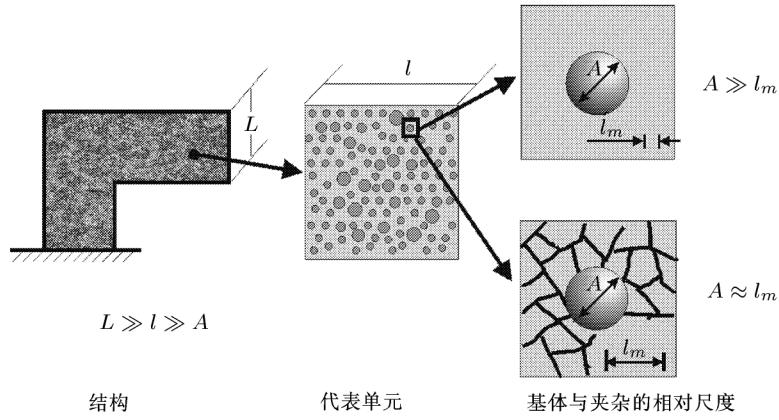


图 1 结构、代表单元和夹杂及基体的特征尺度关系之一

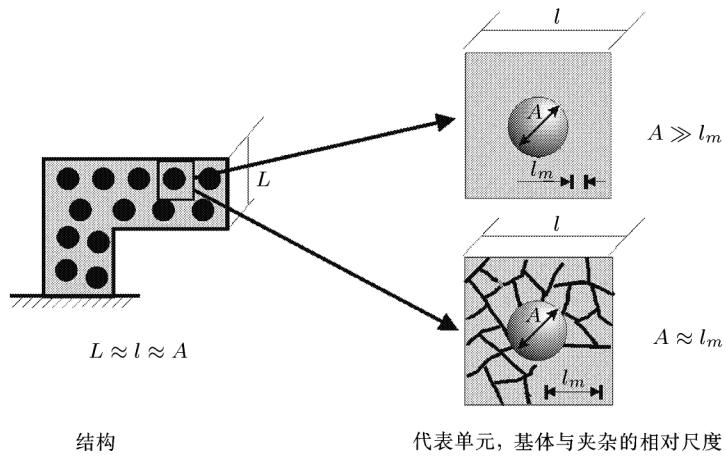


图 2 结构、代表单元和夹杂及基体的特征尺度关系之二

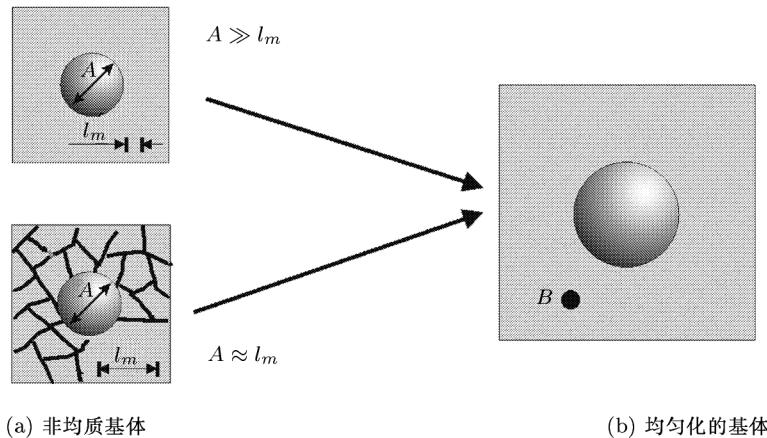


图 3 不同尺度下基体材料连续均匀化模型

这就意味着含有  $B$  点的一个小微元内应该含有许多典型的微结构 (这里指晶粒), 使微元满足 Cauchy 介质中代表单元的条件<sup>[16]</sup>, 这就要求  $A \gg l_m$ . 传统细观力学实际上隐含着如下尺度关系  $L \gg l \gg A \gg l_m$ , 只有在这种情况下, 构元材料才能连续化成为 Cauchy 介质, 并且均质化后的材料也可以看

作 Cauchy 介质. 当上述尺度关系不满足时, 构元材料或均质化后的材料模型必须考虑微观结构的尺度特点, 或者说应该把它们连续化成一个具有微观结构的连续介质, 这里称之为高阶连续介质 (high order continuum). 表 1 给出了不同的尺度关系和所对应的连续化介质模型.

本文将主要讨论尺度关系满足  $L \gg l \gg A \approx l_m$  时的宏细观过渡方法, 这时构元材料需要考虑自身的微结构特点而均质化后的材料仍然可以看成 Cauchy 介质。这样的均质化模型适用于金属基复合材料、纳米复合材料、泡沫材料为基体的复合材料等等。显然这种新的宏细观过渡方法应该涵盖传统的宏细观过渡方法, 并且当夹杂尺度远远大于基体的特征尺度时两种过渡方法应该一致。

表 1 不同尺度关系与连续化模型

构元模型	尺度关系		均质化模型
Cauchy 介质	$A \gg l_m$	$L \gg l, l \gg A$	Cauchy 介质
高阶介质	$A \approx l_m$		
Cauchy 介质	$A \gg l_m$	$L \approx l, l \approx A$	高阶介质
高阶介质	$A \approx l_m$		

将一个本质上非均质材料连续化成均质材料时, 传统的连续介质力学方法 (Cauchy 介质) 是假设介质中的任何微元表面只传递力而不传递力偶, 因此只是对具有微结构材料的一阶近似描述<sup>[17]</sup>。为了更好地考虑材料所具有的微观结构特征, Voigt<sup>[18]</sup>曾假设介质中微元表面能够承受力偶, Voigt 的想法被法国学者 Cosserat 兄弟<sup>[19]</sup>发展成为一个相当严格的连续介质力学理论。在该理论框架中任何一个质点被赋予 6 个自由度: 3 个位移和 3 个刚性转角自由度。这个理论在沉寂了近半个世纪后, 出于更好地刻画材料的微观结构影响的需要, 以及 Truesdell 和 Toupin<sup>[20]</sup>, Mindlin 和 Tiersten<sup>[21]</sup>, Eringen<sup>[22]</sup>, Nowacki 等<sup>[23]</sup>的工作, 使得高阶连续介质理论的研究在 20 世纪 60 年代 ~70 年代又活跃起来, 并成功地用于解释构件在一定条件下所体现出的尺度相关现象, 有关这方面的研究可参见文献 [24~29]。关于高阶连续介质理论系统和全面的研究和阐述可参见 Eringen 最近的专著<sup>[30]</sup>, 我们将在随后做一简单的介绍。

有关微观结构尺度对复合材料宏观性能影响的研究是近年来细观力学的一个热点课题。由于复合材料的宏观响应本质上具有非局部 (nolocal) 的特性, 为了部分考虑这种非局部性, 许多研究者从细观的角度进行了许多尝试。早在 1970 年, Beran 和 McCoy<sup>[31]</sup>通过非均匀介质的统计弹性力学分析研究, 得到了复合材料的非局部本构关系。Luciano 和 Willis<sup>[32]</sup>利用上述思路分析了夹杂基体型复合材料的非局部应力应变关系。Zuiker 和 Dvrok<sup>[33]</sup>通过在复合材料代表单元边界上施加线性应变条件, 假

设构元材料为传统的 Cauchy 介质, 他们得到了含有应力、应力梯度及应变和应变梯度的高阶复合材料本构关系。Forest<sup>[34]</sup>, Forest 等<sup>[35]</sup>将构元材料看作高阶连续介质, 系统地研究了宏细观过渡方法。Yuan 和 Tomita<sup>[36]</sup>假设构元介质为微极材料并假设纤维周期分布, 他们利用有限元的方法分析了复合材料宏观有效模量与纤维尺度的关系。Bouyge 等<sup>[37]</sup>利用有限元方法分析了构元材料为 Cauchy 介质材料, 而宏观复合材料为微极材料时有效弹性性质与构元性质及微观结构的关系。关于夹杂的尺度对复合材料弹塑性性能影响的研究工作主要有: 魏悦广<sup>[38]</sup>通过假设基体材料的塑性变形符合应变梯度理论, 通过周期单元和有限元数值方法分析了夹杂尺度对复合材料有效弹塑性性能的影响。最近 Cheng 和 Wang<sup>[39]</sup>把基体看作微极介质, 利用有限元方法分析了周期短纤维复合材料的弹塑性性质与纤维尺度和形状的关系。Zbib 等<sup>[40]</sup>将基体材料看作符合 Afantis<sup>[29]</sup>提出的本构模型, 通过数值方法和纤维周期分布假设分析了夹杂尺度的影响。另外 Nan 和 Clark<sup>[41]</sup>, Dai 等<sup>[42]</sup>利用位错模型也分析了夹杂的尺度影响。但是将基体看作高阶连续介质的模型都是假设夹杂为微周期分布, 并且都是通过有限元数值方法求解。针对非均匀高阶介质, 发展解析的细观力学模型是非常重要和必要的, 胡更开等最近在微极介质理论的框架下, 建立了从非均匀微极介质到 Cauchy 介质的解析的过渡方法, 将传统细观力学的弹性和塑性分析方法推广到微极复合材料有效性质的分析<sup>[43~45]</sup>, 本文将主要介绍这部分工作。在此之前, 为了便于对微极介质理论有个全面的认识, 我们将首先介绍一下高阶连续介质理论。

### (1) 高阶连续介质理论简介

高阶连续介质理论的主要特点是假设介质中的微元体是由许多连续可变形的点构成, 因此描述宏观连续介质中微元体的变形, 通常是通过宏观变形和微元体内的微观变形两部分组成。对微元体内部的微观变形形式做不同的假设, 形成了一系列高阶连续介质理论, 下面我们将简要介绍几种高阶理论的要点, 详细的理论推导和理论框架参见文献 [30, 46]。无指标时, 文中以黑体表示矢量或张量, 具体含义和阶数于上下文中说明; 符号  $\bullet$ ,  $:$  和  $\vdash$  表示指标的 1 次, 2 次和 3 次缩并,  $\otimes$  为张量积。

假设高阶连续介质中一个微元体  $P(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Xi})$ , 它的质心坐标是  $\mathbf{X}$ ,  $\boldsymbol{\Xi}$  表示微元体内任意一点到质心的位置矢量。经过  $t$  时刻变形后, 它们分别变为

$P(\mathbf{x}, \xi), \mathbf{x}, \xi$ , 如图 4 所示.

假设用  $N$  个不同的点来描述微元体内部的微观变形, 这样微元体质心和内部任意第  $n$  点的运动可用如下关系描述

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad \xi_n = \xi_n(\mathbf{X}, \Xi_n, t) \quad (1)$$

式 (1) 的前式描述微元体的宏观运动, 后式刻画微元体内部的微观运动, 为了简化一般令  $N = 1$ . 通过对微观变形描述做一些假设和限制, 可以得到一系列精度不同的高阶连续介质理论, 在后面的讨论中, 我们只针对小变形进行讨论.

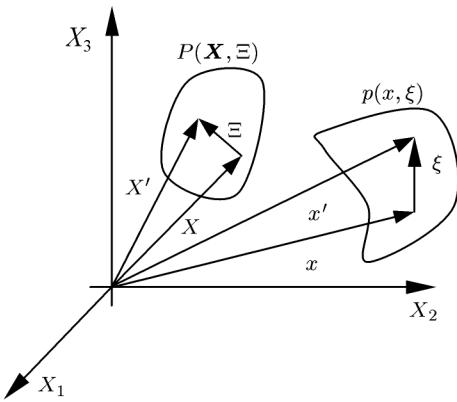


图 4 微元体的变形示意图

### (1) 微态理论 (micromorphic)

该理论假设微元体内的微观运动用如下形式描述

$$\xi = \chi(\mathbf{X}) \cdot \Xi \quad (2)$$

二阶张量  $\chi(\mathbf{X})$  定义了 3 个独立的方向矢量  $\chi_k = \chi \cdot i_k$  (Cosserat 称之为 director). 微态理论实际上是用 3 个可变形的方向矢量来描述微元体内的微观变形, 该理论的控制方程为  
几何方程

基于小变形假设, 令  $\chi = \mathbf{I} + \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{I}$  是二阶单位张量,  $\mathbf{X}$  为微位移张量, 则取如下应变度量

$$\gamma = \mathbf{u} \otimes \nabla - \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}^S = \{\mathbf{X}\}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{X} \otimes \nabla \quad (3)$$

$\nabla$  是梯度算子, 二阶张量  $\gamma$ ,  $\mathbf{X}^S$  和三阶张量  $\mathbf{K}$  分别表示相对应变, 微观应变和微观应变梯度. 与它们热力学相对偶的应力量分别用  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{S}$  和  $\mathbf{M}$  表示, 这里操作符 { } 指对称化.

忽略体积力的平衡方程

$$\mathbf{t} \cdot \nabla = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} \cdot \nabla + \mathbf{t} - \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (4)$$

本构方程

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{A} : \gamma + \mathbf{E} : \mathbf{X}^S \\ \mathbf{S} &= \mathbf{E} : \gamma + \mathbf{B} : \mathbf{X}^S \\ \mathbf{M} &= \mathbf{D} : \mathbf{K} \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{D}$  为微态理论的弹性常数张量 ( $\mathbf{D}$  为 6 阶张量), 对于各向同性微态理论, 他们的独立参数和具体形式可参见文献 [30]. 微态理论中描述微观变形的量  $\mathbf{X}$  是一个任意二阶张量, 因此具有较广的适用性.

### (2) 二阶梯度理论 (second grade theory)

该理论首先由法国学者 German 从热力学的角度在 1973 年提出 [46], 后被以不同的形式推广到非线性, 该理论也常被称为应变梯度理论. 该理论相当于微态理论中令微观变形为如下形式  $\mathbf{X} = \mathbf{u} \otimes \nabla$ , 这样相对应变  $\gamma = 0$ , 微观应变为  $\mathbf{X}^S = \{\mathbf{u} \otimes \nabla\}$ , 微观应变梯度为  $\mathbf{K} = \mathbf{u} \otimes \nabla \otimes \nabla$ . 与之对偶的应力量分别为  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{M}$ . 可以看出  $\mathbf{X}^S$ ,  $\mathbf{S}$  实际就是 Cauchy 介质中的对称的应变与应力. 最终二阶梯度理论的控制方程为 (几何方程, 平衡方程和各向同性本构关系)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^S &= \{\mathbf{u} \otimes \nabla\}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{u} \otimes \nabla \otimes \nabla \\ \boldsymbol{\Sigma} \cdot \nabla &= 0, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{S} - \mathbf{M} \cdot \nabla \\ \mathbf{S} &= \mathbf{C} : \mathbf{X}^S, \quad \mathbf{M} = \mathbf{D} : \mathbf{K} \end{aligned} \quad (6)$$

$\mathbf{C}$  就是 Cauchy 介质的弹性模量张量. 该理论的基本变量只有宏观位移, 只是在本构和平衡方程中考虑了位移的高阶梯度和相应的对偶量的影响, 因此比较容易应用.

### (3) 微膨胀理论 (micro-stretch)

微膨胀理论对微变形张量  $\chi(\mathbf{X})$  做了进一步的约束, 以一个刚性转动  $\mathbf{R}$  和一个代表体积微膨胀的标量  $j$  的复合来代替  $\chi$ , 即  $\chi = j\mathbf{R}$ , 在小变形下

$$\mathbf{R} \approx \mathbf{I} + \mathbf{e} \cdot \phi, \quad j \approx 1 + 3\theta \quad (7)$$

$\phi$  表达材料微粒点相对质心的刚性转动,  $\mathbf{e}$  是三阶置换张量. 于是, 不计高阶量, 我们有

$$\chi \approx \mathbf{I} + 3\theta\mathbf{I} + \mathbf{e} \cdot \phi = \mathbf{I} + \mathbf{X}$$

如此时的  $\mathbf{X}$  按式 (3) 做微态形式的应变度量, 则各应变分量将不是独立的. 可定义如下形式独立的微膨胀理论应变

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{u} \otimes \nabla - \mathbf{e} \cdot \phi, \quad \mathbf{k} = \phi \otimes \nabla$$

$\theta\nabla$  及  $\theta$  与微态理论应变的关系是

$$\begin{aligned}\gamma &= \varepsilon - 3\theta\mathbf{I} \\ \mathbf{X}^S &= 3\theta\mathbf{I} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{k} + 3(\theta\nabla) \otimes \mathbf{I}\end{aligned}\quad (8)$$

与应变热力学对偶的微膨胀理论的应力用  $\sigma, \mathbf{m}, \mathbf{p}$  和  $s$  表示, 其与微态理论形式的应力量的关系为

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3}\mathbf{p} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{2}\mathbf{e} \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{S} = s\mathbf{I} \quad (9)$$

平衡方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla &= 0, \quad \mathbf{m} \cdot \nabla + \mathbf{e} : \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \mathbf{p} \cdot \nabla + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) - s &= 0\end{aligned}\quad (10)$$

各向同性的本构方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : \varepsilon + \lambda_0\theta\mathbf{I}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{D} : \mathbf{k} \\ \mathbf{p} &= \eta(\theta\nabla), \quad \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) - s = \lambda_0\text{tr}(\varepsilon) + b\theta\end{aligned}\quad (11)$$

其中  $\mathbf{C}, \mathbf{D}$  为 4 阶各向同性弹性张量,  $\lambda_0, \eta, b$  为标量, 是材料常数, 算子  $\text{tr}$  指对张量取迹. Microstretch 问题共有 50 个未知量和方程.

#### (4) 微极理论 (micropolar)

该理论对微元体内部微观结构的运动做了进一步约束, 即微元体内任意点的微观运动只是围绕质心的刚性转动, 即对应微膨胀理论中  $j = 1$ , 亦即  $\theta = 0$ . 由此简化得到微极理论的基本方程为 (忽略体力和体力偶):

几何方程

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{u} \otimes \nabla - \mathbf{e} \cdot \phi, \quad \mathbf{k} = \phi \otimes \nabla \quad (12)$$

平衡方程

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = 0, \quad \mathbf{m} \cdot \nabla + \mathbf{e} : \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (13)$$

本构方程

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \varepsilon + \mathbf{B} : \mathbf{k}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{B} : \varepsilon + \mathbf{D} : \mathbf{k} \quad (14)$$

该理论在高阶理论中得到较广泛的发展和应用, 下面我们还将就该理论的弹性和塑性变形理论进行介绍.

#### (5) 偶应力理论 (couple stress)

偶应力理论是在微极理论的基础上进一步假设: 材料点的微转动不再是独立的, 而等同于传统弹性力学中一点邻域的刚性转动, 即在微极理论中令  $\phi = \mathbf{e} : (\mathbf{u} \otimes \nabla)$ , 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \{\mathbf{u} \otimes \nabla\} = (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u})/2 \\ \mathbf{k} &= \mathbf{e} : (\mathbf{u} \otimes \nabla) \otimes \nabla\end{aligned}$$

当不考虑微元体内部微结构的变形时, 上述高阶连续介质理论退化成传统的 Cauchy 介质理论, 可以看出 Cauchy 介质模型是在材料连续化过程中一个非常简单的模型, 该理论忽略了材料微观结构的影响.

## 2 微极介质弹性和塑性理论

### 2.1 微极弹性理论

根据 Eringen<sup>[30]</sup> 的工作, 微极介质中的任意微元是由许多连续可变形的点构成. 为了描述微元整体及内部变形点的运动规律, 微极介质理论假设描述微元体的运动除微元体质心的位移变量  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$  外, 还有描述微元体内部变形点绕微元体质心的转动变量  $\phi(\mathbf{X})$ , 其中  $\mathbf{X}$  是微元体质心的位置, 实际上微极理论中微元体内部变形点的运动假设是绕质心的刚性转动. 将式 (12)~式 (14) 的控制方程写为指标形式:

几何方程

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} - e_{kij}\phi_k, \quad k_{ij} = \phi_{j,i} \quad (15)$$

平衡方程

$$\sigma_{ij,i} = 0, \quad m_{ij,i} + e_{jik}\sigma_{ik} = 0 \quad (16)$$

本构方程 (中心对称材料, 即本构关系与坐标系的反置无关, 式 (14) 中  $\mathbf{B} = 0$ )

$$\sigma_{ji} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad m_{ji} = D_{ijkl}k_{kl} \quad (17)$$

相应的力和位移边界条件为

$$\sigma_{ij}n_i = p_j \quad m_{ij}n_i = z_j, \quad \text{on } \Gamma^\sigma \quad (18)$$

$$u_i = u_i^b \quad \phi_i = \phi_i^b, \quad \text{on } \Gamma^u \quad (19)$$

其中  $\sigma_{ij}$  和  $m_{ij}$  是应力和偶应力张量,  $\varepsilon_{ij}$  和  $k_{ij}$  分别表示应变和扭率张量;  $C_{ijkl}$  和  $D_{ijkl}$  是微极理论中的弹性系数张量.  $p_j$  和  $z_j$  表示面力和力矩,  $n_i$  为外法矢量; 重复角标意味着求和. 由于微极理论中微元体间的作用除传统的面力外还有力偶, 这样应力和应变将不再是反对称张量.

以下我们只讨论各向同性、中心对称微极介质, 此时弹性张量为

$$C_{jikl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + (\mu + \kappa)\delta_{jk}\delta_{il} + (\mu - \kappa)\delta_{ik}\delta_{jl} \quad (20)$$

$$D_{jikl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + (\beta + \gamma)\delta_{jk}\delta_{il} + (\beta - \gamma)\delta_{ik}\delta_{jl} \quad (21)$$

其中  $\mu, \lambda$  是传统的 Lame 系数,  $\kappa, \gamma, \beta, \alpha$  是微极理论中新引入的弹性常数.  $\delta_{ij}$  是 Kroneker Delta.

为了方便引入如下表示法, 对于任意 4 阶各向同性张量  $K_{jikl}$ , 总能表示成如下形式<sup>[23]</sup>

$$K_{jikl} = K_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + (K_2 + K_3) \delta_{jk} \delta_{il} + (K_2 - K_3) \delta_{ik} \delta_{jl} = K_{jikl}^s + K_{jikl}^a \quad (22)$$

其中  $K_{jikl}^s$  和  $K_{jikl}^a$  分别是张量  $K_{jikl}$  的对称部分和反对称部分, 分别表示为

$$\begin{aligned} K_{jikl}^s &= K_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + K_2 (\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \\ K_{jikl}^a &= K_3 (\delta_{jk} \delta_{il} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \end{aligned} \quad (23)$$

如果将弹性系数张量分解成对称和反对称部分, 则对称部分联系着应力(偶应力)和应变(扭率)的对称部分, 而反对称部分联系着相应的反对称性的量. 根据 Nowacki<sup>[23]</sup> 的讨论, 如果用  $\sigma'_{(ij)}, \sigma_{\langle ij \rangle}, \bar{\sigma}$  ( $\bar{\sigma} = \sigma_{ii}$ ) 和  $\varepsilon'_{(ij)}, e_{\langle ij \rangle}, \bar{\varepsilon}$  ( $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{ii}$ ) 分别表示对称应力(应变)的偏量部分、反对称应力(应变)和应力(应变)的球量部分, 同样对于偶应力和扭率. 这样中心对称和各向同性材料的本构关系可表示为

$$\begin{aligned} \sigma'_{(ij)} &= 2\mu \varepsilon'_{(ij)}, \quad \sigma_{\langle ij \rangle} = 2\kappa \varepsilon_{\langle ij \rangle}, \quad \bar{\sigma} = 3K\bar{\varepsilon} \\ m'_{(ij)} &= 2\beta k'_{(ij)}, \quad m_{\langle ij \rangle} = 2\gamma k_{\langle ij \rangle}, \quad \bar{m} = 3L\bar{k} \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ ,  $L = \alpha + \frac{2}{3}\beta$ ,  $K$  是体积模量,  $L$  是与  $K$  对应的偶应力关系的量.

这样应变能密度可写为

$$\begin{aligned} U &= \mu \varepsilon'_{(ij)} \varepsilon'_{(ij)} + \kappa \varepsilon_{\langle ij \rangle} \varepsilon_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{2} K \bar{\varepsilon}^2 + \\ &\quad \beta k'_{(ij)} k'_{(ij)} + \gamma k_{\langle ij \rangle} k_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{2} L \bar{k}^2 = \\ &\quad \frac{1}{4\mu} \sigma'_{(ij)} \sigma'_{(ij)} + \frac{1}{4\kappa} \sigma_{\langle ij \rangle} \sigma_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{18K} \bar{\sigma}^2 + \\ &\quad \frac{1}{4\beta} m'_{(ij)} m'_{(ij)} + \frac{1}{4\gamma} m_{\langle ij \rangle} m_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{18L} \bar{m}^2 \end{aligned} \quad (25)$$

这样有两套量纲不同的模量,  $\mu, \lambda, \kappa$  联系着应力与应变, 具有应力量纲;  $\gamma, \beta, \alpha$  联系着偶应力和扭率, 具有力的量纲. 通过两套模量可以定义材料的内在弹性尺度, 他们有多种定义方法, 这里定义为

$$l_1^2 = \frac{\beta}{\mu}, \quad l_2^2 = \frac{\gamma}{\mu}, \quad l_3^2 = \frac{\alpha}{\mu} \quad (26)$$

对于二维第一平面应变问题, 上述控制方程为(希腊

字母角标从 1 到 2).

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\beta,\alpha} - e_{3\alpha\beta}\phi_3, \quad k_{\alpha 3} = \phi_{3,\alpha}$$

$$\sigma_{\alpha\beta,\alpha} = 0, \quad m_{\beta 3,\beta} + e_{3\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = 0$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \varepsilon_{\zeta\zeta} \delta_{\alpha\beta} + (\mu + \kappa) \varepsilon_{\alpha\beta} + (\mu - \kappa) \varepsilon_{\beta\alpha} \quad (27)$$

$$m_{\alpha 3} = (\beta + \gamma) k_{\alpha 3} = (\beta + \gamma) \phi_{3,\alpha}$$

$$m_{3\alpha} = (\beta - \gamma) k_{\alpha 3} = (\beta - \gamma) \phi_{3,\alpha}$$

同样任意 4 阶各向同性张量  $K_{\alpha\beta\gamma\zeta}$ , 可以按式(22)表示和分解, 只是脚标从 1 到 2. 式(24)中关于应力和应变关系的前两式仍然成立(脚标从 1 到 2), 第三式为  $\bar{\sigma} = 2K\bar{\varepsilon}$ , 这时  $K$  为面积模量,  $K = \lambda + \mu$ .

$$\sigma'_{(\alpha\beta)} = 2\mu \varepsilon'_{(\alpha\beta)}, \quad \sigma_{\langle\alpha\beta\rangle} = 2\kappa \varepsilon_{\langle\alpha\beta\rangle}, \quad \bar{\sigma} = 2K\bar{\varepsilon}$$

$$m_{\alpha 3} = (\beta + \gamma) k_{\alpha 3} = 2\bar{\beta} k_{\alpha 3} \quad (28)$$

$$m_{3\alpha} = (\beta - \gamma) k_{\alpha 3} = 2\bar{\gamma} k_{\alpha 3}$$

在二维第一平面应变状态下, 应变能密度可表示为

$$\begin{aligned} U &= \mu \varepsilon'_{(\alpha\beta)} \varepsilon'_{(\alpha\beta)} + \kappa \varepsilon_{\langle\alpha\beta\rangle} \varepsilon_{\langle\alpha\beta\rangle} + \frac{1}{2} K \bar{\varepsilon}^2 + \\ &\quad \bar{\beta} k_{\alpha 3} k_{\alpha 3} = \frac{1}{4\mu} \sigma'_{(\alpha\beta)} \sigma'_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{4\kappa} \sigma_{\langle\alpha\beta\rangle} \sigma_{\langle\alpha\beta\rangle} + \\ &\quad \frac{1}{8K} \bar{\sigma}^2 + \frac{1}{4\bar{\beta}} m_{\alpha 3} m_{\alpha 3} \end{aligned} \quad (29)$$

## 2.2 微极塑性理论

微极介质的塑性理论目前尚不够完善, 为了结合非均质微极介质的有效塑性分析, 这里将介绍分析微极介质塑性的一种全量理论, 该方法推广了传统 Cauchy 介质的  $J_2$  全量理论, 我们将在此基础上给出微极介质的割线模量. 该方法的核心是定义一个有效应力, Lippman<sup>[47]</sup>, Liu 和 Hu<sup>[43]</sup> 讨论了不同有效应力的定义方法. 这里我们将按照如下方法定义微极介质的等效应力

$$\bar{\sigma}_e = \sqrt{\frac{3}{2} \left[ \sigma'_{(ij)} \sigma'_{(ij)} + \left( \frac{1}{l_1^2} m'_{(ij)} m'_{(ij)} + \frac{1}{l_2^2} m_{\langle ij \rangle} m_{\langle ij \rangle} \right) \right]} \quad (30)$$

可以看出如果忽略微极效应, 上述等效应力退化成传统 Cauchy 介质的 Von Mises 等效应力. 其中  $\bar{l}_i$  ( $i = 1, 2$ ) 是材料在塑性状态下的内在尺度参数, 是材料常数. 上述等效应力的定义实际上意味着应力的球量部分, 反对称部分和偶应力的球量部分不参与材料的塑性变形. 当然还可以进一步引进一些参数来区分应力与偶应力的对称部分和反对称部分的差别, 有关讨论见文献 [43, 47].

将微极介质的非线性应力势表示为

$$w = w_0(\bar{\sigma}_e) + \frac{1}{4\kappa}\sigma_{\langle ij \rangle}\sigma_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{18K}\bar{\sigma}^2 + \frac{1}{18L}\bar{k}^2 \quad (31)$$

这样有

$$\varepsilon'_{(ij)} = \frac{\partial w}{\partial \sigma'_{(ij)}} = \frac{\partial w_0}{\partial \bar{\sigma}_e} \frac{3}{2\bar{\sigma}_e} \sigma'_{(ij)} \quad (32a)$$

$$\varepsilon_{\langle ij \rangle} = \frac{1}{2\kappa} \sigma_{\langle ij \rangle} \quad (32b)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{3K} \bar{\sigma} \quad (32c)$$

$$k'_{(ij)} = \frac{\partial w_0}{\partial \bar{\sigma}_e} \frac{3}{2l_1^2 \bar{\sigma}_e} m'_{(ij)} \quad (32d)$$

$$k'_{\langle ij \rangle} = \frac{\partial w_0}{\partial \bar{\sigma}_e} \frac{3}{2l_2^2 \bar{\sigma}_e} m'_{\langle ij \rangle} \quad (32e)$$

$$\bar{k} = \frac{1}{3L} \bar{m} \quad (32f)$$

式 (32) 实际上定义了微极介质的一种塑性全量理论, 进而可以定义微极介质的割线模量. 下面将传统材料的幂硬化关系推广到微极介质材料, 即

$$\bar{\sigma}_e = \sigma_y + H\bar{\varepsilon}_{ep}^n \quad (33)$$

或

$$w_0(\bar{\sigma}_e) = \frac{\bar{\sigma}_e^2}{6\mu} + \frac{n}{n+1} \frac{1}{H^{1/n}} (\bar{\sigma}_e - \sigma_y)^{(n+1)/n} \quad (34)$$

其中  $\sigma_y, H, n$  是材料的硬化参数, 由单向拉伸实验得到, 上述形式与 Hu<sup>[48]</sup> 关于传统介质的形式一致, 有趣的是上述方法与 Chen 和 Wang<sup>[28]</sup> 从另外一个角度所得到的理论一致.

对于第一平面应变问题, 等效应力可以定义为

$$\bar{\sigma}_e = \sqrt{\frac{3}{2} \left[ (\sigma'_{(\alpha\beta)}\sigma'_{(\alpha\beta)} + \sigma'_{33}\sigma'_{33}) + \frac{1}{l_1^2} m_{\alpha 3} m_{\alpha 3} \right]} \quad (35)$$

同样可以按照三维情况建立微极介质在第一平面应变情况下的塑性全量理论和相应的割线模量.

### 3 非均匀微极介质的宏细观过渡方法

对于传统介质 (Cauchy 介质), 相邻两点只有力的相互作用, 对应着非均匀介质的宏细观过渡方法是首先假设存在这样一个代表单元 (其尺度用  $l$  表示), 在宏观上代表单元表示结构中的一个点, 它的尺度远大于非均匀介质的特征尺度 ( $A$ , 如夹杂的尺度); 另外假设在这样的一个代表单元上宏观应变或应力

是均匀的, 这要求代表单元要充分小, 使得描述宏观应力 (应变) 场的尺度  $L$  远大于代表单元尺度  $l$ . 当我们关心大的结构时, 上述假设是很容易满足的, 因此传统细观力学随着复合材料的应用和开发得到了巨大的发展. 但随着人们将注意力转向微米和纳米尺度时, 在这样的尺度下, 如薄膜材料在厚度上只有几个晶粒, 即使将整个薄膜看作代表单元也很难满足  $l \gg A$  条件. 同样刻划外力扰动程度的条件也难以保证, 这种情况在裂纹尖端, 界面尤为突出. 在这种情况下微观结构的特性就会凸现出来, 描述材料这样的特性需要引入新的自由度, 即将非均匀材料均质化成高阶连续介质. 另外对于这样一类问题, 如多晶材料, 泡沫材料基复合材料, 纳米复合材料等, 这类问题中夹杂的尺度相当或小于基体的微结构特征尺度, 使得 Cauchy 介质的宏细观过渡方法中的尺度要求  $A \gg l_m$  不再成立. 描述这样一类材料有效性质时, 构元材料的等效需要采用高阶连续介质模型, 这时所反映出来的是夹杂 (增强相) 对基体在尺度效应的放大效果, 这将是本文主要研究内容. 从 Cauchy 介质到 Cauchy 介质的均质化方法, 已有过许多讨论, 具体可参见文献 [16]. 下面我们将讨论从 Cauchy 介质均质化成高阶连续介质, 以及从高阶介质均质化成高阶介质的宏细观过渡方法.

#### 3.1 传统 Cauchy 介质均质化成高阶连续介质的宏细观过渡方法

这种过渡方法主要适用于代表单元的尺度与微结构的尺度相当的情况, 或作用在代表单元上的应力或应变不再能看作均匀. 因此在所研究的代表单元边界上除需施加传统的线性位移边界条件外, 还需要施加新的高阶边界条件. 下面我们根据 Forest<sup>[48]</sup> 给出的方法, 就从传统 Cauchy 介质均质化成二阶梯度、微极介质的宏细观过渡方法简单做一个介绍.

##### 3.1.1 Cauchy 介质均质化成二阶梯度连续介质

在代表单元 (RVE) 上施加如下位移边界条件

$$u_i = E_{ij}x_j + \frac{1}{2}K_{ijk}x_jx_k \quad (36)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial RVE, \text{ 其中 } K_{ijk} = K_{ikj}$$

可以证明

$$\langle u_{i,j} \rangle = E_{ij} \quad (37)$$

$$\langle \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle E_{ij} + \langle \sigma_{ij}\delta_{j(m}x_{n)} \rangle K_{imn} \quad (38)$$

这里  $\langle \bullet \rangle$  指在代表单元的平均. 由此可以分别定义宏观应力和高阶应力为  $\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle$ ,  $M_{imn} =$

$\langle\sigma_{ij}\delta_{j(m}x_{n)}\rangle$ . 这样在求等效介质的模量时, 需要在边界条件 (36) 下, 求局部应力和应变场, 然后计算相应的应力与高阶应力, 进而得到等效高阶连续体的有效模量.

### 3.1.2 Cauchy 介质均匀化成微极介质理论

在代表单元 (RVE) 上施加如下位移边界条件

$$u_i = E_{ij}x_j + \frac{1}{2}e_{ijk}k_{lj}x_lx_k, \quad \forall x \in \partial RVE \quad (39)$$

同样可以证明

$$\langle u_{i,j} \rangle = E_{ij} \quad (40)$$

$$\langle \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle E_{ij} + \langle e_{ikl}\sigma_{lj}x_k \rangle K_{ij} \quad (41)$$

定义宏观应力与偶应力  $\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle$ ,  $M_{ij} = \langle e_{ikl}\sigma_{lj}x_k \rangle$ . 同前面二阶梯度理论一样, 等效微极介质的有效性质也可以通过求解一个边值问题得到.

不同于传统 Cauchy 介质的宏细观过渡方法, 高阶介质的宏细观过渡不存在着相应等价的力边界条件, 即难以构成传统细观力学宏观有效性质的 Hill 条件. 另外对于微极介质, 从宏观定义的等效应力  $\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle$  可以看出, 由于 Cauchy 介质中微观应力是对称的, 因此宏观等效应力也是对称的, 这样宏观上应力或应变的反对称部分无法通过上述过渡法则计算出来. Forest<sup>[49]</sup> 认为宏观应变的反对称部分代表着代表单元的转动, 由于上述过渡法则只考虑了一个微极代表单元, 该代表单元转动所受的阻力无法由它本身来描述. 为此 Forest<sup>[49]</sup> 提出用代表单元簇来考虑宏观反对称应变.

## 3.2 微极介质均质化成微极介质的宏观过渡方法

### 3.2.1 微极介质均质化成微极介质

3.1 节讲述了从传统 Cauchy 介质到高阶连续介质的一些过渡方法, 下面我们将介绍从微极介质均质化成微极介质的宏细观的过渡方法. 研究非均匀微极介质构成的代表单元 (RVE), 在代表单元边界  $\partial RVE$  施加如下位移边界条件

$$u_j = E_{ij}x_i, \quad \phi_j = K_{ij}x_i \quad (42)$$

这里  $E_{ij}$  和  $K_{ij}$  是常数. 对于任意的静力许可场  $(\sigma_{ij}, m_{ij})$  (满足平衡方程和应力边界条件) 和协调场  $(\varepsilon_{ij}, k_{ij})$  (满足几何方程和位移边界条件), 我们有

$$\langle \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}k_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij}(u_{j,i} - e_{kij}\varphi_k) \rangle + \langle m_{ij}\varphi_{j,i} \rangle =$$

$$\frac{1}{V} \int_{\partial RVE} \sigma_{ij}u_j n_i dS + E \frac{1}{V} \int_{\partial RVE} m_{ij}\phi_j n_i dS =$$

$$\begin{aligned} & E_{mj} \frac{1}{V} \int_{\partial RVE} \sigma_{ij}x_m n_i dS + \\ & K_{mj} \frac{1}{V} \int_{\partial RVE} m_{ij}x_m n_i dS = \\ & E_{mj}\langle \sigma_{mj} \rangle + K_{mj}\langle m_{ij,i}x_m + m_{ij}\delta_{im} \rangle = \\ & E_{mj}\langle \sigma_{mj} \rangle + K_{mj}\langle -e_{jik}\sigma_{ik}x_m + m_{ij}\delta_{im} \rangle \end{aligned} \quad (43)$$

另外

$$\langle u_{j,m} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} E_{ij}x_i n_m ds = E_{mj} \quad (44)$$

$$\langle \phi_{j,m} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} K_{ij}x_i n_m ds = K_{mj} \quad (45)$$

根据上面的能量关系, 可以分别定义宏观应力和宏观偶应力为  $\Sigma_{mj} = \langle \sigma_{mj} \rangle$  和  $M_{mj} = \langle -e_{jik}\sigma_{ik}x_m + m_{ij}\delta_{im} \rangle$ , 下面只研究宏观复合材料有效性质也是中心对称的情况, 这样, 复合材料的极性有效模量可以通过计算  $\Sigma = \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{E}$  和  $M = \bar{\mathbf{D}} : \mathbf{K}$  得到, 并且有

$$\langle \sigma : \varepsilon + m : k \rangle = \mathbf{E} : \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{E} + \mathbf{K} : \bar{\mathbf{D}} : \mathbf{K} \quad (46)$$

这里需要强调的是宏观力偶并不是简单的微观力偶的平均. 另外式 (43) 和 (46) 中宏观量  $\mathbf{E}$  是位移梯度, 而不是有效微极介质中的宏观应变, 这一点与传统的宏细观过渡方法有很大的不同. 因此在解边值问题时, 微观转角的平均也必须计算, 只有这样才能真正求得有效微极介质的全部有效弹性张量. 最后还应该指出的是, 在一般情况下与边界条件 (42) 相对应的应力边界条件  $p_j = \Sigma_{ij}n_i$ ,  $z_j = M_{ij}n_i$  并不存在, 因为这样的应力场并不是自平衡的. 根据微极介质的平衡方程, 均匀的 (非对称) 应力场需要线性分布的偶应力与之相平衡. 这个问题归根到底是对应着微极介质是否存在均匀应力和应变状态, 并且是否互逆, 否则所得的有效性质就与代表单元的边界条件有关. 这或许是微极介质构成的复合材料有效性质的特点, 或许我们得另外寻求一种新的宏细观过渡方法, 这方面需要进一步的研究.

### 3.2.2 微极介质均匀化成 Cauchy 介质

对于尺度关系满足  $L \gg l \gg A$  时, 相对于结构来讲代表单元仍然满足 Cauchy 介质的过渡条件, 因此宏观上代表单元仍然受到传统均匀对称应力或应变作用, 也就是说代表单元的宏观响应可用一个 Cauchy 介质模型来反映. 由于  $A \approx l_m$ , 这时我们将

基体材料看作微极介质(考虑它的微观结构的影响),因此需要研究从微极介质到Cauchy介质的宏细观过渡方法.在这种情况下,代表单元的边界条件是

$$u_j = E_{(ij)}x_i, \quad \phi_j = 0 \quad (47)$$

因此式(46)变为

$$\langle \sigma : \varepsilon + m : k \rangle = \mathbf{E}^S : \bar{\mathbf{C}}^S : \mathbf{E}^S \quad (48)$$

并且可以证明

$$\langle \varepsilon_{(ij)} \rangle = \frac{1}{2} \langle u_{i,j} + u_{j,i} \rangle = E_{(ij)} \quad (49)$$

同样如果在边界上施加应力边界

$$t_{ij}n_i = \Sigma_{(ij)}n_i, \quad m_{ij}n_i = 0 \quad (50)$$

这样宏细观能量等价式(46)可以表示为

$$\langle \sigma : \varepsilon + m : k \rangle = \boldsymbol{\Sigma}^S : \bar{\boldsymbol{M}}^S : \boldsymbol{\Sigma}^S \quad (51)$$

另外还有

$$\langle \sigma_{(ij)} \rangle = \Sigma_{(ij)} \quad (52)$$

上面讨论中上角标 $S$ 指对称量,上述宏细观过渡法则同样适用于第一平面应变情况.前面所定义的宏细观过渡法则式(48),式(51)实际上给出了确定非均匀微极材料均质化成Cauchy介质的有效模量(或柔度)的方法.在代表单元上施加边界条件式(47),然后求解非均匀微极介质中的局部场,从局部场中对称应力和应变进行平均即可得到宏观均质化介质中的有效模量.下面将只讨论这种宏细观过渡方法.

## 4 微极介质的局部化问题

### 4.1 无限大中心对称和各向同性微极介质球形和柱形域的Eshelby解

对于传统Cauchy介质,Eshelby<sup>[50]</sup>给出了无限大基体中有一椭球域,在该椭球域内有一均匀本征应变问题的解,结果表明在椭球域内应变是均匀的.Eshelby的结果被广泛用于细观力学求解局部化问题<sup>[16]</sup>.对于微极介质,我国学者Cheng和He<sup>[51,52]</sup>给出了无限大中心对称和各向同性微极介质中,有一球形或无限长圆柱形域中有一均匀本征应变 $\varepsilon^+$ 和扭率 $k^+$ 时问题的解,该结果可以表示为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mathbf{K}(\mathbf{x}) : \varepsilon^+ + \mathbf{L}(\mathbf{x}) : \mathbf{k}^+ \\ \mathbf{k} &= \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) : \varepsilon^+ + \hat{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) : \mathbf{k}^+ \end{aligned} \quad (53)$$

$\mathbf{K}, \hat{\mathbf{K}}, \mathbf{L}, \hat{\mathbf{L}}$ 是微极介质的Eshelby张量,它们的具体表达式可参见文献[51, 52].与传统的Eshelby解不同的是,即使在球域或柱形域内,由均匀本征应变和扭率所产生的应变和扭率也不是均匀的.这样使在Cauchy介质中广泛应用的等效夹杂方法,在微极介质中不再严格成立,因为非均质夹杂内的应力、扭率的扰动不能用一个均匀的本征应变和本征扭率来模拟.为此Liu and Hu<sup>[43]</sup>提出了平均等效夹杂方法,认为在平均的意义上传统的等效夹杂方法仍然成立.如用 $\mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1$ 表示夹杂的模量(夹杂为球形或无限长圆柱),将该夹杂放置在模量为 $\mathbf{C}_0, \mathbf{D}_0$ 的无限大介质中,受远场 $\mathbf{E}_0, \mathbf{K}_0$ 作用,这样平均等效夹杂方法可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 : (\mathbf{E}_0 + \langle \varepsilon \rangle_I) &= \mathbf{C}_0 : (\mathbf{E}_0 + \langle \varepsilon \rangle_I - \langle \varepsilon^+ \rangle_I) \\ \mathbf{D}_1 : (\mathbf{K}_0 + \langle \mathbf{k} \rangle_I) &= \mathbf{D}_0 : (\mathbf{K}_0 + \langle \mathbf{k} \rangle_I - \langle \mathbf{k}^+ \rangle_I) \end{aligned} \quad (54)$$

$\langle \bullet \rangle_I$ 指某量在夹杂内的体积平均.对式(54)进行平均,得

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle_I &= \langle \mathbf{K} \rangle_I : \langle \varepsilon^+ \rangle_I + \langle \mathbf{L} \rangle_I : \langle \mathbf{k}^+ \rangle_I \\ \langle \mathbf{k} \rangle_I &= \langle \hat{\mathbf{K}} \rangle_I : \langle \varepsilon^+ \rangle_I + \langle \hat{\mathbf{L}} \rangle_I : \langle \mathbf{k}^+ \rangle_I \end{aligned} \quad (55)$$

严格上讲上述平均等效方法并没有把所有的信息等效过来,但我们希望在平均意义上上述平均等效夹杂方法能够反映主要的等效信息.在随后我们就无限长柱型夹杂,还将平均等效方法与精确解进行比较来说明平均等效夹杂方法的合理性.由于微极介质的Eshelby张量的表达式非常复杂,经过冗长的计算最后证明对于球形和无限长柱型夹杂有<sup>[43,44]</sup>

$$\langle \mathbf{L} \rangle_I = 0 \text{ 和 } \langle \hat{\mathbf{K}} \rangle_I = 0 \quad (56)$$

并且对于二维圆柱型夹杂有

$$\begin{aligned} \langle K_{\alpha\beta\lambda\varsigma}(x) \rangle_I &= T_1 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\varsigma} + (T_2 + T_3) \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\varsigma} + \\ &\quad (T_2 - T_3) \delta_{\alpha\varsigma} \delta_{\beta\lambda} \end{aligned} \quad (57)$$

$$\langle \hat{L}_{\alpha 3 \lambda 3}(x) \rangle_I = Q_{33} \delta_{\alpha\lambda} \quad (58)$$

其中

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\lambda_0 - \mu_0}{4(\lambda_0 + 2\mu_0)} + \frac{\kappa_0}{2(\kappa_0 + \mu_0)} I_1(a/h) K_1(a/h) \\ T_2 &= \frac{\lambda_0 + 3\mu_0}{4(\lambda_0 + 2\mu_0)} - \frac{\kappa_0}{2(\kappa_0 + \mu_0)} I_1(a/h) K_1(a/h) \\ T_3 &= \frac{4\kappa_0 + \mu_0}{2\mu_0} - \frac{(2\kappa_0 + \mu_0)^2}{\mu(\kappa_0 + \mu_0)} I_1(a/h) K_1(a/h) \\ Q_{33} &= \frac{\gamma_0(\kappa_0 + \mu_0)}{4g^2\kappa_0\mu_0} I_1(a/g) K_1(a/g) \end{aligned}$$

对于球形夹杂有

$$\begin{aligned}\langle K_{ijkl}(x) \rangle_I &= T_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + (T_2 + T_3) \delta_{ik} \delta_{jl} + \\ &\quad (T_2 - T_3) \delta_{il} \delta_{jk}\end{aligned}\quad (59)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{L}_{ijkl}(x) \rangle_I &= Q_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + (Q_2 + Q_3) \delta_{ik} \delta_{jl} + \\ &\quad (Q_2 - Q_3) \delta_{il} \delta_{jk}\end{aligned}\quad (60)$$

其中

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{3\lambda_0 - 2\mu_0}{15(\lambda_0 + 2\mu_0)} + \frac{2h(a+h)\kappa_0}{5a^3(\kappa_0 + \mu_0)} \Gamma(h) \\ T_2 &= \frac{3\lambda_0 + 8\mu_0}{15(\lambda_0 + 2\mu_0)} - \frac{3h(a+h)\kappa_0}{5a^3(\kappa_0 + \mu_0)} \Gamma(h) \\ T_3 &= \frac{8\kappa_0 + 3\mu_0}{6\mu_0} - \frac{h(a+h)(\mu_0 + 2\kappa_0)^2}{a^3\mu_0(\kappa_0 + \mu_0)} \Gamma(h) - \\ &\quad \frac{g(a+g)}{2a^3} \Gamma(g) \\ Q_1 &= \frac{(a+g)(5\alpha_0 + 2\beta_0)}{20a^3g\kappa_0} \Gamma(g) - \\ &\quad \frac{(h+a)\beta_0(\kappa_0 + \mu_0)}{10a^3h\kappa_0\mu_0} \Gamma(h) \\ Q_2 &= \frac{(a+g)\beta_0}{10a^3g\kappa_0} \Gamma(g) + \frac{3(a+h)\beta_0(\kappa_0 + \mu_0)}{20a^3h\kappa_0\mu_0} \Gamma(h) \\ Q_3 &= \frac{(a+h)\gamma_0(\kappa_0 + \mu_0)}{4a^3h\kappa_0\mu_0} \Gamma(h)\end{aligned}$$

其中函数

$$\Gamma(y) = e^{-a/y} \left[ a \cosh \frac{a}{y} - y \sinh \frac{a}{y} \right]$$

上述表达式中  $a$  是夹杂半径  $h^2 = \frac{(\mu_0 + \kappa_0)(\gamma_0 + \beta_0)}{4\mu_0\kappa_0}$ ,  $g^2 = \frac{\alpha_0 + 2\beta_0}{4\kappa_0}$  的量纲为长度的平方.

上述结果表明, 平均意义上讲本征应变只产生非零的平均应变, 而本征扭率只产生非零的平均扭率, 从平均意义上讲它们是解耦的, 这与杨军<sup>[53]</sup>将微极 Eshelby 张量用 Taylor 展开后再平均的结果一致.

## 4.2 涂层纤维在无限大基体中的解

Xun 等<sup>[44]</sup>给出了无限大基体中有一纤维和涂层单元, 受远场对称应力作用下问题的解. 所采用的方法是根据 Eringen 给出的应力势函数方法, 设第  $i$  个区 ( $i = 0, 1, 2$ , 分别指基体、纤维和界面层) 的应力势函数为  $F_i, G_i$ , 在柱坐标系下

$$\sigma_{rr}^i = \frac{1}{r} \frac{\partial F_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_i}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 G_i}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial G_i}{\partial \theta} \quad (61)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^i = \frac{\partial^2 F_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 G_i}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial G_i}{\partial \theta} \quad (62)$$

$$\sigma_{r\theta}^i = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_i}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F_i}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial G_i}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G_i}{\partial \theta^2} \quad (63)$$

$$m_{rz}^i = \frac{\partial G_i}{\partial r} \quad (64)$$

$$m_{\theta z}^i = \frac{1}{r} \frac{\partial G_i}{\partial \theta} \quad (65)$$

这样每个区的协调方程可以用应力势函数表示为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} (G_i - c_i^2 \nabla^2 G_i) &= -2(1 - \nu_i) b_i^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 F_i) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (G_i - c_i^2 \nabla^2 G_i) &= 2(1 - \nu_i) b_i^2 \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 F_i)\end{aligned}\quad (66)$$

其中

$$\begin{aligned}b_i^2 &= \frac{\beta_i}{4\mu_i} = \frac{c_i^2}{2(1 + \mu_i/\kappa_i)} = d_i c_i^2 \\ \nu_i &= \frac{\lambda_i}{2(\lambda_i + \mu_i)}\end{aligned}\quad (67)$$

$c_i, b_i$  具有长度量纲, 代表着材料的内在特征尺度. 式 (66) 还可以写成

$$\begin{aligned}\nabla^4 F_i &= 0 \\ \nabla^2 (G_i - c_i^2 \nabla^2 G_i) &= 0\end{aligned}\quad (68)$$

$\nabla^2$  是 Laplace 算子.

方程 (68) 的通解可以表示为如下形式

$$\begin{aligned}F_i &= A_1^i R^2 \log r + A_2^i r^2 + (A_3^i R^2 + A_4^i r^2 + \\ &\quad A_5^i R^4 r^{-2} + A_6^i R^{-2} r^4) \cos 2\theta \\ G_i &= [A_7^i R^4 r^{-2} + A_8^i r^2 + A_9^i R^2 K_2(r/c_i) + \\ &\quad A_{10}^i R^2 I_2(r/c_i)] \sin 2\theta\end{aligned}\quad (69)$$

其中  $I_M(r/c_i)$  是修正的一型  $M$  阶 Bessel 函数,  $K_M(r/c_i)$  是修正的二型  $M$  阶 Bessel 函数,  $R$  为纤维半径. 上式中的常数  $A_j^i$  由界面连续性条件和边界条件确定, 这样局部场和他们在各相的平均即可求的, 并且是精确的. 一般将外载分解成球压载荷  $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} = \Sigma$  和纯剪载荷  $\Sigma_{11} = -\Sigma_{22}$  两种情况. 经过计算, 各相的平均应力与外加载荷的关系可以写为

静水压力载荷( $i = 1, 2$  分别指夹杂纤维和界面层)

$$\bar{\sigma}_{xx}^i = \bar{\sigma}_{yy}^i = 2A_2^i = s_i \Sigma \quad (70)$$

其他分量为零

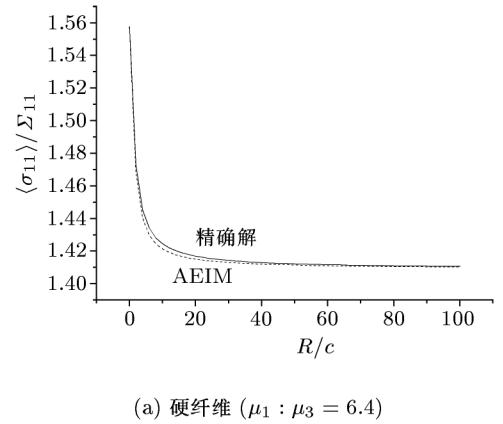
## 纯剪载荷

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx}^1 &= -\bar{\sigma}_{yy}^1 = -(2A_4^1 + 2A_8^1 + 3A_6^1) - \\ I_1(R/c_1)RA_{10}^1/2c_1 &= p_1 \Sigma_{11} \quad (71)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx}^2 &= -\bar{\sigma}_{yy}^2 = -[2A_4^2 + 3(1+t^2)A_6^2 + 2A_8^2] - \\ \frac{R}{2c_2(t^2-1)}\{[-K_1(R/c_2) + tK_1(Rt/c_2)]A_9^2 + \\ [I_1(R/c_2) - tI_1(Rt/c_2)]A_{10}^2\} &= p_2 \Sigma_{11} \quad (72)\end{aligned}$$

其中  $\bar{\sigma}_{xx}^i, \bar{\sigma}_{yy}^i$  是指量  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  在第  $i$  相内的平均,  $t = R_2/R$ ,  $R_2$  是界面层的半径.  $s_1, s_2; p_1, p_2$  分别为在静水压力载荷和纯剪切载荷作用下纤维和界面层的平均应力集中系数.

纤维和基体 (没有界面层) 情况是上述问题的特例. 图 5(a), 5(b) 给出了纤维内平均应力的精确解与平均等效夹杂方法 (AEIM) 的结果比较, 我们分别比较了硬纤维和软纤维两种情况.



(a) 硬纤维 ( $\mu_1 : \mu_3 = 6.4$ )

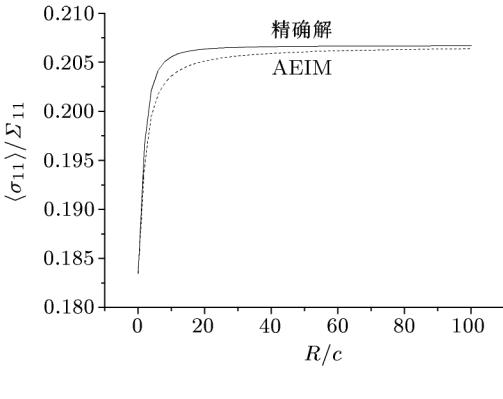


图 5 平均等效夹杂方法 (AEIM) 与精确解对纤维中的平均应力与参数  $R/c$  关系的预测比较

宏观载荷为单向应力, 计算中的材料常数令为  $\nu_1 = 1/3$ ,  $\nu_0 = 1/4$ ,  $d_1 = 0.1$ ,  $d_0 = 0.3$ , 另外令  $c_0 = c_1 = c$ ,  $\eta_1 = R/c_1 = \eta_0 = R/c_0 = R/c$ . 从比较结果可以看出平均等效夹杂方法能够准确地预测夹

杂内的平均应力与夹杂尺度的关系.

## 5 有效模量预测

到目前为止, 我们已经能够利用平均等效夹杂方法计算在任意远场载荷  $\mathbf{E}_0, \mathbf{K}_0$  作用下, 球形夹杂或无限长柱型夹杂内的平均应力与远场载荷的解析关系, 以及具有涂层纤维内的平均应力与远场传统应力的关系. 结果表明对于这样一类特殊夹杂形状, 远场的应变在夹杂内产生平均不为零的应变, 其扭率只在夹杂内产生平均不为零的扭率. 对于一般性椭球夹杂, 该结果是否仍然成立, 目前还没有答案. 下面我们就球形 (柱型或具有涂层的柱型) 夹杂和微极基体构成的复合材料, 利用第 3.2 节给出的宏细观过渡方法来计算微极材料均质化成 Cauchy 介质的有效模量. 就多夹杂问题, 这里我们将采用传统介质中广泛应用的 Mori-Tanaka 方法的概念. 首先来考察平均等效夹杂方法, 代表单元远场只受  $\mathbf{E}^S(E_{ij})$  作用. 将夹杂 (球形或圆柱型) 放置于微极基体材料中并受待求基体平均应变  $\mathbf{E}_0$  和扭率  $\mathbf{K}_0$  的作用. 由于平均意义上讲, 两种外载作用解耦, 因此下面只关心式 (54), 式 (55) 的应力与应变的关系. 将这两个关系式又分解成对称和反对称部分, 就对称部分有

$$\mathbf{C}_1^S : (\mathbf{E}_0^S + \langle \varepsilon^S \rangle_I) = \mathbf{C}_0^S : (\mathbf{E}_0^S + \langle \varepsilon^S \rangle_I - \langle \varepsilon^{S+} \rangle_I) \quad (73)$$

$$\langle \varepsilon^S \rangle_I = \langle \mathbf{K}^S \rangle_I : \langle \varepsilon^{S+} \rangle_I \quad (74)$$

令夹杂的体积百分比为  $f$ , 根据前面的宏细观过渡方法有

$$\mathbf{E}^S = \mathbf{E}_0^S + f \langle \varepsilon^S \rangle_I \quad (75)$$

根据上述 3 个方程即可确定基体和夹杂内平均对称应变与宏观所加对称应变的关系, 然后利用均质化关系  $\boldsymbol{\Sigma}^S = (1-f)\boldsymbol{\sigma}_0^S + f\langle \boldsymbol{\sigma}^S \rangle_I$  就可以建立均质复合材料的有效模量. 从上面的关系可以看出, 它们与传统 Cauchy 介质的 Mori-Tanaka 方法是完全一致的. 因此按照传统 Cauchy 介质的细观力学方法, 非均质微极介质构成的复合材料的有效体积 (和面积) 和剪切模量为

$$\mu_c = \mu_0 \left\{ 1 + \frac{f}{2(1-f)\langle K_{1212}^S \rangle_I + [\mu_0/(\mu_1 - \mu_0)]} \right\} \quad (76)$$

$$k_c = k_0 \left\{ 1 + \frac{f}{[(1-f)\langle K_{iijj}^S \rangle_I/d] + [k_0/(k_1 - k_0)]} \right\} \quad (77)$$

对于二维复合材料，体积模量实际为面积模量， $d = 2$ ，由式(57)，式(58)

$$\langle K_{1212}^S \rangle_I = 2T_2 = \frac{3\mu_0 + \lambda_0}{4(2\mu_0 + \lambda_0)} - \frac{\kappa_0}{2(2\mu_0 + \kappa_0)} \times I_1(a/h)K_1(a/h) \quad (78)$$

$$\langle K_{iijj}^S \rangle_I = 2(\mu_0 + \lambda_0)/(2\mu_0 + \lambda_0) \quad (79)$$

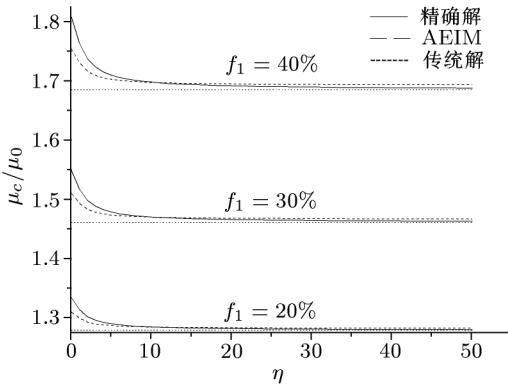
对于球形夹杂构成的复合材料， $d = 3$ ，并且由式(59)，式(60)

$$\begin{aligned} \langle K_{1212}^S \rangle_I &= \frac{3\lambda_0 + 8\mu_0}{15(\lambda_0 + 2\mu_0)} - \frac{3h(a+h)\kappa_0}{5a^3(\kappa_0 + \mu_0)} \times \\ &e^{-a/h} \left[ a \cosh \frac{a}{h} - h \sinh \frac{a}{h} \right] \end{aligned} \quad (80)$$

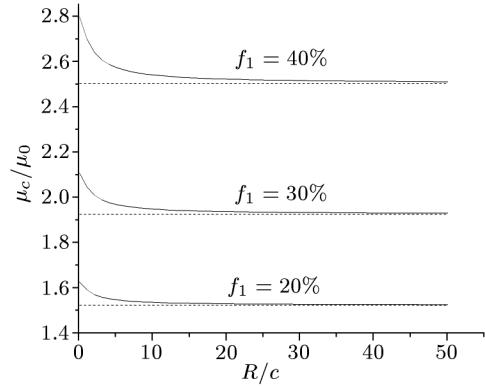
$$\langle K_{iijj}^S \rangle_I = \frac{3\lambda_0 + 2\mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \quad (81)$$

从上述结果可以看出，对于球形或无限长圆柱形夹杂和微极基体构成的各向同性复合材料，其有效体积(或面积)模量与传统 Cauchy 介质的结果一致。图 6(a) 给出了基于平均等效夹杂方法和精确解对复合材料有效剪切模量的预测结果比较，可以看出有效剪切模量与纤维的尺度有关，当纤维的半径渐大时微极介质的有效模量趋于与传统介质一致。

图 6 中传统结果是指基于 Cauchy 介质理论的预测，这一点也可以直接从 Eshelby 张量的表达式中看出。从比较结果可以看出平均等效夹杂方法还是能够较准确反映由微极介质构成的复合材料有效剪切模量与纤维尺度的变化关系。计算中所用的材料参数为  $\eta = R/c_1 = R/c$ ,  $\eta_0 = R/c_0$ ,  $\mu_1 : \mu_0 = 6.4$ ,  $\nu_1 = 1/3$ ,  $\nu_0 = 1/4$ ,  $R_1 = R$ ,  $b_i^2 = d_i c_i^2$ ,  $d_1 = 0.1$ ,  $d_0 = 0.3$ ，另外  $\eta_1 = \eta_0 = \eta$ 。



(a) 纤维 - 基体复合材料



(b) 纤维 - 涂层 - 基体复合材料

图 6 不同纤维体积百分比下复合材料有效剪切模量与参数  $R/c$  变化关系

对于涂层纤维复合材料，利用第 3.2 节的局部化关系并仿照文献 [54] 的方法，最后可以得用 Mori-Tanaka 方法对含有涂层纤维构成的复合材料有效剪切和体积模量。

$$\begin{aligned} \mu_c &= \frac{f_1 p_1 + f_2 p_2 + (1 - f_1 - f_2)}{f_1 \frac{p_1}{\mu_1} + f_2 \frac{p_2}{\mu_2} + (1 - f_1 - f_2) \frac{1}{\mu_0}} \\ k_c &= \frac{f_1 s_1 + f_2 s_2 + (1 - f_1 - f_2)}{f_1 \frac{s_1}{k_1} + f_2 \frac{s_2}{k_2} + (1 - f_1 - f_2) \frac{1}{k_0}} \end{aligned} \quad (82)$$

$f_1$  指纤维的体积百分比， $f_2$  指界面层的体积含量。

同两相材料一致，具有涂层的纤维和微极基体构成的复合材料，其有效面积模量与传统介质用相同的方法所得的结果一致。同样对于有效剪切模量微极介质的预测结果与纤维的尺度有关，当纤维的半径

趋于无限大时，微极理论预测结果与 Cauchy 介质的结果一致，见图 6(b)。计算中所用到的计算常数为  $\eta_1 = R/c_1 = R/c$ ,  $\eta_2 = R/c_2$ ,  $\eta_0 = R/c_0$ ,  $\nu_1 = 0.25$ ,  $\nu_2 = 0.35$ ,  $\nu_0 = 0.4$ ,  $\mu_1 : \mu_2 : \mu_0 = 84 : 13 : 1$ ,  $R_1 = R$ ,  $R_2 = 1.1R$ ,  $b_i^2 = d_i c_i^2$ ,  $d_1 = 0.1$ ,  $d_2 = 0.3$ ,  $d_0 = 0.2$ ，并且  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_0 = \eta$ 。上述数值预测结果与 Yuan 和 Tomita<sup>[36]</sup> 用有限元方法对周期分布纤维的复合材料预测结果一致。

## 6 微极复合材料细观塑性二阶矩割线模量方法

对于传统 Cauchy 介质，Qiu 和 Weng<sup>[55]</sup>, Hu<sup>[48]</sup> 发展了非均质材料细观塑性二阶矩方法，该方法彻底克服了一阶矩割线模量存在的缺陷，并且

与 Ponte Castaneda<sup>[56]</sup> 基于变分原理提出的塑性势方法一致, 有关塑性二阶矩方法可参见文献 [57]. Liu 和 Hu<sup>[43]</sup> 最近又将该方法推广到由微极介质构成的复合材料中, 下面我们将具体介绍该方法.

### 6.1 微极介质构成的复合材料基体应力和力偶的平均二阶矩

对于复合材料, 连续相基体内的应力和力偶不是均匀的, 并且其分布非常复杂. 下面我们将给出计算基体内应力和力偶平均二阶矩的一般解析计算方法, 而这些量又是直接与微极基体塑性相关联的. 仿照传统 Cauchy 介质的方法<sup>[48]</sup>, 首先我们将研究宏观过渡方法的能量关系. 将宏观能量等价式 (51) 写成柔度形式

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{m}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{m} : \mathbf{d}(\mathbf{x}) : \mathbf{m} \rangle = \boldsymbol{\Sigma}^S : \overline{\mathbf{M}}^S : \boldsymbol{\Sigma}^S \quad (83)$$

对代表单元保持外载荷不变, 让局部材料弹性张量产生如下独立变分  $\delta\mathbf{m}(\mathbf{x}), \delta\mathbf{d}(\mathbf{x})$ , 这样宏观柔度张量也将产生变分  $\delta\overline{\mathbf{M}}^S$ , 这样式 (83) 变为

$$\begin{aligned} & \langle \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{m}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{m} : \delta\mathbf{d}(\mathbf{x}) : \mathbf{m} \rangle + \\ & 2\langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{m}(\mathbf{x}) : \delta\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{m} : \mathbf{d}(\mathbf{x}) : \delta\mathbf{m} \rangle = \\ & \boldsymbol{\Sigma}^S : \delta\overline{\mathbf{M}}^S : \boldsymbol{\Sigma}^S \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & \langle \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} + k_{ij}\delta m_{ij} \rangle = \\ & \langle (u_{j,i} - e_{kij}\phi_k)\delta\sigma_{ij} + \phi_{j,i}\delta m_{ij} \rangle = \\ & \langle u_{j,i}\delta\sigma_{ij} \rangle - \langle e_{kij}\phi_k\delta\sigma_{ij} \rangle + \langle (\delta m_{ij}\phi_j),_i - \phi_j\delta m_{ij},_i \rangle = \langle (u_j\delta\sigma_{ij}),_i \rangle + \langle (\delta m_{ij}\phi_j),_i \rangle - \\ & \langle u_j\delta\sigma_{ij},_i \rangle - \langle \phi_j(e_{jik}\delta\sigma_{ik} + \delta m_{ij},_i) \rangle = \\ & \langle (u_j\delta\sigma_{ij}),_i \rangle + \langle (\delta m_{ij}\phi_j),_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} & \langle \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{m}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{m} : \delta\mathbf{d}(\mathbf{x}) : \mathbf{m} \rangle = \\ & \boldsymbol{\Sigma}^S : \delta\overline{\mathbf{M}}^S : \boldsymbol{\Sigma}^S \end{aligned} \quad (84)$$

同样可以证明, 上式对第一型平面应变问题仍然成立, 上式是普适的, 对任何微极材料都成立. 下面利用式 (84) 分别让基体的弹性常数  $\mu_0, \kappa_0, \beta_0, \gamma_0, L_0$  产生变分  $\delta\mu_0, \delta\kappa_0, \delta\beta_0, \delta\gamma_0, \delta L_0$ , 并且只考虑两相复合材料, 利用上式得

$$(1-f)\langle \sigma'_{(ij)}\sigma'_{(ij)} \rangle_0 \delta\left(\frac{1}{2\mu_0}\right) = \boldsymbol{\Sigma}^S : \delta\overline{\mathbf{M}}^S : \boldsymbol{\Sigma}^S \quad (85)$$

$$(1-f)\langle \sigma_{(ij)}\sigma_{(ij)} \rangle_0 \delta\left(\frac{1}{2\kappa_0}\right) = \boldsymbol{\Sigma}^S : \delta\overline{\mathbf{M}}^S : \boldsymbol{\Sigma}^S \quad (86)$$

$$(1-f)\langle \bar{\sigma}^2 \rangle_0 \delta\left(\frac{1}{9K_0}\right) = \boldsymbol{\Sigma}^S : \delta\overline{\mathbf{M}}^S : \boldsymbol{\Sigma}^S \quad (87)$$

$$(1-f)\langle m'_{(ij)}m'_{(ij)} \rangle_0 \delta\left(\frac{1}{2\beta_0}\right) = \boldsymbol{\Sigma}^S : \delta\overline{\mathbf{M}}^S : \boldsymbol{\Sigma}^S \quad (88)$$

$$(1-f)\langle m_{(ij)}m_{(ij)} \rangle_0 \delta\left(\frac{1}{2\gamma_0}\right) = \boldsymbol{\Sigma}^S : \delta\overline{\mathbf{M}}^S : \boldsymbol{\Sigma}^S \quad (89)$$

$$(1-f)\langle \bar{m}^2 \rangle_0 \delta\left(\frac{1}{9L_0}\right) = \boldsymbol{\Sigma}^S : \delta\overline{\mathbf{M}}^S : \boldsymbol{\Sigma}^S \quad (90)$$

$\langle \bullet \rangle_0$  指某量在微极基体内的平均.

这样由式 (30) 定义的微极基体的平均等效应力与外载荷的关系最终可以表示为

$$\bar{\sigma}_e = \left\{ \frac{3}{1-f} \left[ \boldsymbol{\Sigma}^S : \left( \mu_0^2 \frac{\partial \overline{\mathbf{M}}^S}{\partial \mu_0} + \frac{\beta_0^2}{l_1^2} \frac{\partial \overline{\mathbf{M}}^S}{\partial \beta_0} + \frac{\gamma_0^2}{l_2^2} \frac{\partial \overline{\mathbf{M}}^S}{\partial \gamma_0} \right) : \boldsymbol{\Sigma}^S \right]^{1/2} \right\} \quad (91)$$

均质化后复合材料的有效模量我们已经求得 (式 (76), 式 (77), 式 (82)), 因此考虑微极基体和夹杂构成的复合材料的屈服面可令  $\bar{\sigma}_e = \sigma_y^0$  得到,  $\sigma_y^0$  为微极基体的初始屈服应力. 整个复合材料的硬化行为可以按造 Cauchy 介质的割线模量方法来加以描述, 下面我们将讨论微极介质中割线模量的定义.

### 6.2 割线模量方法

根据 2.2 节讨论的微极材料的塑性变形规律, 基体产生塑性变形后的割线模量定义为

$$\begin{aligned} \mu^s &= \frac{1}{(1/\mu_0) + 3[(\bar{\sigma}_e - \sigma_y^0)/H]^{1/n}/\bar{\sigma}_e} \\ \kappa_0^s &= \kappa_0 \\ \gamma_0^s &= \beta_0^s = 2l_p^2 \mu_0^s \\ K_0^s &= K_0 \\ L_0^s &= L_0 \end{aligned} \quad (92)$$

$\bar{\sigma}_e$  是由式 (30) 定义的有效应力在基体中的平均, 复合材料的有效柔度张量已知, 该等效应力可按式 (91) 计算. 下面假设夹杂是弹性的, 当外载荷使得基体的平均等效应力满足  $\bar{\sigma}_e = \sigma_y^0$  时, 复合材料基体开始屈服, 也即复合材料开始屈服. 当基体发生塑性屈服时, 它对夹杂的约束影响就会改变, 我们将采用 Cauchy 介质中广泛应用的割线模量方法来刻划这种变化<sup>[48,55]</sup>. 在给定任意外载荷  $\boldsymbol{\Sigma}^S$  (复合材料已经开始屈服) 时, 我们用一个线性比较复合材料来描述非线性复合材料此时的应力与应变关系. 该线性比较复合材料具有与所研究的复合材料相同的微观结

构。比较复合材料的基体具有非线性复合材料基体的平均割线模量，由式(92)给出，并与当前非线性复合材料基体的变形状态有关（基体的平均等效应力 $\bar{\sigma}_e$ ）。

线性比较复合材料的弹性模量就是非线性复合材料在当前应力下的割线模量，通过式(91)，式(92)及线性比较复合材料的模量关系式，可以确定在给定 $\Sigma^S$ 下所对应基体平均等效应力 $\bar{\sigma}_e$ 。这样非线性复合材料的应力-应变关系就可以通过一系列线性比较复合材料的弹性模量得到。正如前面所说，当不考虑基体的极性时（或夹杂尺度远大于基体的特征尺度），上述方法退化成传统 Cauchy 介质的应力二阶矩的割线模量方法或 Ponte Castaneda 的塑性势方法。下面我们将证明关于非线性微极复合材料的二阶矩割线模量方法同样具有变分结构。

### 6.3 非线性微极复合材料的变分方法

正如传统 Cauchy 介质，上述微极介质的塑性二阶矩割线模量方法同样具有与之等价的变分方法<sup>[45]</sup>。根据 Nowacki<sup>[23]</sup> 的工作，如果令 $\sigma^*$ ,  $m^*$ 为微极结构的静力许可场（满足平衡方程(16)和力边界条件(18)式）； $u^*$ ,  $\phi^*$ 为同一结构的位移许可场（满足几何方程(15)及位移边界条件(19)式），而 $\sigma, m^*$ 和 $u, \phi$ 为结构的真实应力和位移场（同时满足式(15)~式(19)）。最小势能和余能原理可以表述为：对于任意的静力许可场 $\sigma^*, m^*$ 和位移许可场 $u^*, \phi^*$ ，总有

$$\begin{aligned} -W(\sigma^*, m^*) &\leq -W(\sigma, m) = \\ U(u, \phi) &\leq U(u^*, \phi^*) \end{aligned} \quad (93)$$

其中 $W(\sigma^*, m^*)$ 和 $U(u^*, \phi^*)$ 为结构的余能和势能，它们分别为

$$\begin{aligned} W(\sigma^*, m^*) &= \int_V w(\sigma^*, m^*) dV - \\ &\int_{\Gamma_u} (\mathbf{p}^* u^b + z^* \phi^b) dS \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} U(u^*, \phi^*) &= \int_V u(u^*, \phi^*) dV - \\ &\int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{p}^b u^* + z^b \phi^*) dS \end{aligned} \quad (95)$$

下面我们只针对余能原理进行讨论，并取结构为代表单元，边界条件为力的边界

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \Sigma^S \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$$

在该边界条件下，复合材料的等效余能定义为

$$\overline{W}(\Sigma^S) = \langle w(\sigma, \mathbf{m}; \mathbf{x}) \rangle$$

为了一般性这里假设代表单元内有 $N$ 相非线性微极材料，对于第 $r$ 相材料，它的特征函数为 $\chi_r(\mathbf{x})$ ，非线性应力势用 $w_r$ 表示。对每相材料，按照 Ponte Castaneda<sup>[56]</sup> 的方法，定义一个相关的线性比较介质，其应变势写成

$$w_r^S(\sigma, \mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sigma : \mathbf{m}_r^S : \sigma + \frac{1}{2} \mathbf{m} : \mathbf{d}_r^S : \mathbf{m}$$

下面利用线性比较介质定义量 $V^r(\mathbf{m}_r^S, \mathbf{d}_r^S)$ 如下

$$V^r(\mathbf{m}_r^S, \mathbf{d}_r^S) = \sup_{\forall \sigma, \mathbf{m}} [w_r^S(\sigma, \mathbf{m}) - w_r(\sigma, \mathbf{m})] \quad (96)$$

对式(96)两端乘以材料 $r$ 的特征函数，然后对各相材料求和，这样在代表单元内任意一点有

$$w(\sigma, \mathbf{m}; \mathbf{x}) \geq w^S(\sigma, \mathbf{m}; \mathbf{x}) - V(\mathbf{m}^S, \mathbf{d}^S; \mathbf{x}) \quad (97)$$

对式(97)在代表单元中平均，并利用复合材料等效余能的定义有

$$\overline{W}_{\text{eff}} \geq \overline{W}^S(\mathbf{m}^S, \mathbf{d}^S; \Sigma^S) - \overline{V}(\mathbf{m}^S, \mathbf{d}^S) \quad (98)$$

$\overline{W}^S$ 是与非线性复合材料具有相同微观结构的线性比较复合材料的等效余能，而

$$\overline{V}(\mathbf{m}^S, \mathbf{d}^S) = \sum_{r=1}^N c_r V^r(\mathbf{m}_r^S, \mathbf{d}_r^S) \quad (99)$$

式(98)表明非线性微极复合材料的有效余能的下限可以通过相应的线性比较微极复合材料的余能界限来计算。我们还可以对局部线性比较材料的弹性模量进行优化得到优化的界限，即

$$\begin{aligned} \overline{W}_{\text{eff}} \geq \overline{W}_{\text{eff}}^- &= \sup_{\forall \mathbf{m}^S, \mathbf{d}^S} [\overline{W}^S(\mathbf{m}^S, \mathbf{d}^S; \Sigma^S) - \\ &\overline{V}(\mathbf{m}^S, \mathbf{d}^S)] = \sup_{\forall \mathbf{m}^S, \mathbf{d}^S} [F] \end{aligned} \quad (100)$$

我们可以利用界限来直接对复合材料的非线性的应力应变关系进行估计，如 $\mathbf{E}^S = \partial \overline{W}_{\text{eff}}^- / \partial \Sigma^S$ 。对于线性比较微极复合材料，目前还没有得到相应的类似 Hashin-Shtrikman 界限，但可以采用相应的细观力学方法（如前面的 Mori-Tanaka 方法）来对线性比较复合材料的有效余能进行估计。下面我们将证明上述的变分方法式(100)实际与前面给出的塑性二阶矩割线模量方法等价。对于传统 Cauchy 介质，这种等

价关系由 Hu<sup>[48]</sup> 给出。对式(96)中的优化进行计算得

$$\mathbf{m}_r^S : \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w_r}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{d}_r^S : \mathbf{m} = \frac{\partial w_r}{\partial \mathbf{m}} \quad (101)$$

该式表明引入局部线性比较介质的弹性模量是局部非线性介质的割线模量。

下面计算式(100)中的优化，实际该优化过程决定着割线模量随外载的演化规律。由式(100)中的优化得到

$$\begin{aligned} & \langle \chi_r \boldsymbol{\sigma}_r \otimes \boldsymbol{\sigma}_r \rangle + 2 \langle \chi_r \boldsymbol{\sigma}_r : \mathbf{m}_r^S : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_r}{\partial \mathbf{m}_r^S} \rangle - \\ & 2 \langle \chi_r \frac{\partial w_r}{\partial \boldsymbol{\sigma}_r} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_r}{\partial \mathbf{m}_r^S} \rangle = \boldsymbol{\Sigma}^S : \frac{\partial \bar{\mathbf{M}}^S}{\partial \mathbf{m}_r^S} : \boldsymbol{\Sigma}^S \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} & \langle \chi_r \mathbf{m}_r \otimes \mathbf{m}_r \rangle + 2 \langle \chi_r \mathbf{m}_r : \mathbf{d}_r^S : \frac{\partial \mathbf{m}_r}{\partial \mathbf{d}_r^S} \rangle - \\ & 2 \langle \chi_r \frac{\partial w_r}{\partial \mathbf{m}_r} : \frac{\partial \mathbf{m}_r}{\partial \mathbf{d}_r^S} \rangle = \boldsymbol{\Sigma}^S : \frac{\partial \bar{\mathbf{M}}^S}{\partial \mathbf{d}_r^S} : \boldsymbol{\Sigma}^S \end{aligned} \quad (103)$$

在推导式(102), 式(103)时, 我们用到了中心对称材料的性质即

$$\frac{\partial \mathbf{m}_r}{\partial \mathbf{m}_r^S} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_r}{\partial \mathbf{d}_r^S} = 0 \quad (104)$$

由式(101), 式(102)容易证明

$$\begin{aligned} c_r \langle \boldsymbol{\sigma}_r \otimes \boldsymbol{\sigma}_r \rangle_r &= \boldsymbol{\Sigma}^S : \frac{\partial \bar{\mathbf{M}}^S}{\partial \mathbf{m}_r^S} : \boldsymbol{\Sigma}^S \\ c_r \langle \mathbf{m}_r \otimes \mathbf{m}_r \rangle_r &= \boldsymbol{\Sigma}^S : \frac{\partial \bar{\mathbf{M}}^S}{\partial \mathbf{d}_r^S} : \boldsymbol{\Sigma}^S \end{aligned} \quad (105)$$

该结果与基于扰动方法得到的式(84)一致。利用变分方法计算非线性微极复合材料的应力应变关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^S &= \frac{\partial \bar{W}_{\text{eff}}^-}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^S} = \bar{\mathbf{M}}^S : \boldsymbol{\Sigma}^S - \\ &\frac{\partial F}{\partial \mathbf{m}_r^S} : \frac{\partial \mathbf{m}_r^S}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^S} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{d}_r^S} : \frac{\partial \mathbf{d}_r^S}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^S} \end{aligned} \quad (106)$$

由于式(100)优化结果, 有  $\partial F / \partial \mathbf{m}_r^S = \partial F / \partial \mathbf{d}_r^S = 0$ 。因此由变分方法得到的非线性应力应变关系为

$$\mathbf{E}^S = \frac{\partial \bar{W}_{\text{eff}}^-}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^S} = \bar{\mathbf{M}}^S : \boldsymbol{\Sigma}^S \quad (107)$$

该式表明线性比较复合材料的弹性柔度张量  $\bar{\mathbf{M}}^S$  即为非线性微极复合材料的割线模量, 至此我们证明了变分方法与塑性二阶矩割线模量等价。

## 6.4 数值应用

下面我们将上述方法应用于 SiC 颗粒强化的 6061 Al 基复合材料, 在计算中所用到的材料常数在表 2 中给出。

图 7 给出了颗粒体积百分比为  $f = 0.15$ ,  $l_p = 2l_m$ , 夹杂颗粒半径分别是 1 倍, 5 倍, 10 倍和 100 倍基体材料特征常数  $l_m$  时, 复合材料的单向拉伸应力与应变曲线, 没有考虑基体微极效应的预测也同时在图 7 上给出。可以看出同样的颗粒百分比, 夹杂的尺度从  $l_m$  到  $100l_m$ , 在 3.5% 的应变时, 复合材料的应力可以从  $2.2\sigma_y^0$  变到  $1.2\sigma_y^0$ , 而传统的细观力学方法无法预测这种变化。

表 2 计算中所用的材料常数

	6061 Al	SiC
$E$ (GPa)	68.3	490
$\nu$	0.33	0.17
$\mu$ (GPa)	26	209
$\lambda$ (GPa)	50	108
$\kappa$ (GPa)	26	
$l$ (μm)	10	
$\sigma_Y$ (MPa)	250	
$h$ (MPa)	173	
$N$	0.455	

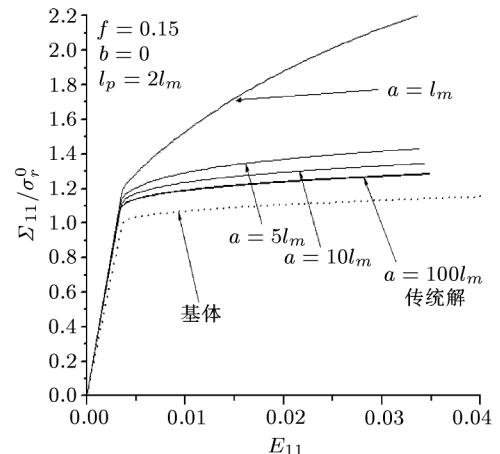


图 7 颗粒尺寸对复合材料硬化曲线的影响

图 8 给出了基体材料塑性特征尺度对复合材料硬化曲线的影响, 颗粒体积百分比为 30%。我们分别研究了基体塑性特征尺度  $l_p$  为  $2l_m$  和  $3l_m$  的情况, 可以看出随着塑性特征尺度的增加, 对颗粒的尺度效应预测就更明显, 在以后的预测时我们取  $l_p = 2l_m$ 。图 9 分别给出了夹杂为刚性和夹杂为孔洞时夹杂的尺寸对复合材料拉伸应力与应变硬化曲线影响的预测, 可以看出夹杂越硬, 其尺度影响就越大; 而对于

孔洞材料在简单拉伸载荷下, 孔洞的尺寸几乎不影响复合材料的硬化曲线。

最后我们将预测结果与现有的实验结果进行比较, 首先是考察由 15% 的 SiC 颗粒增强的 Al356(T4) 基复合材料, 实验结果由 Lloyd<sup>[58]</sup> 给出; 另一种复合材料是由 50% 的 SiC 颗粒增强的 Al-4wt%Mg 合金, 该实验结果由 Yang 等<sup>[59]</sup> 给出。对于这两种材料, 计算中所需的材料常数由表 3 给出。基体的弹性特征尺度对第一种和第二种复合材料分别为  $l_m = 0.75 \mu\text{m}$  和  $l_m = 2 \mu\text{m}$ 。

图 10(a) 给出了由 15%SiC 颗粒增强的 Al356 (T4) 复合材料应力应变的实验曲线和理论预测曲线, 颗粒直径分别为  $7.5 \mu\text{m}$  和  $16 \mu\text{m}$ 。图 10(b) 给出了由 50%SiC 颗粒增强的 Al-4wt%Mg 合金复合材

料应力应变实验曲线和理论模拟曲线, 颗粒直径分别为  $13 \mu\text{m}$  和  $165 \mu\text{m}$ 。在计算中基体的塑性特征尺度  $l_p = 2l_m$ , 从比较的结果可以看出上述解析模型可以预测颗粒的尺度对复合材料弹塑性性能的影响。

表 3 计算中的材料常数

	Al356(T4)	Al-4wt%Mg	SiC
$E$ (GPa)	70	70	490
$\nu$	0.33	0.33	0.17
$\mu$ (GPa)	26.3	26.3	209
$\lambda$ (GPa)	51.1	51.1	108
$\kappa$ (GPa)	13.15	13.15	
$\sigma_Y$ (MPa)	86	124.2	
$h$ (MPa)	414.7	414.7	
$n$	0.365	0.365	

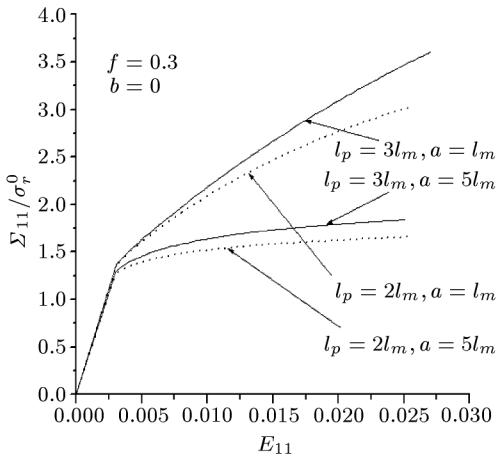


图 8 材料塑性尺度对硬化曲线的影响

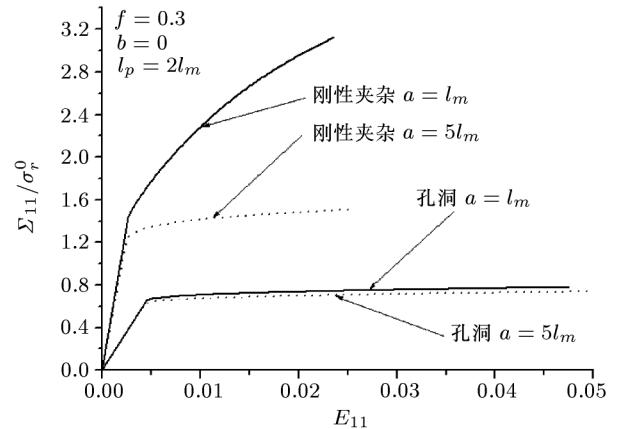
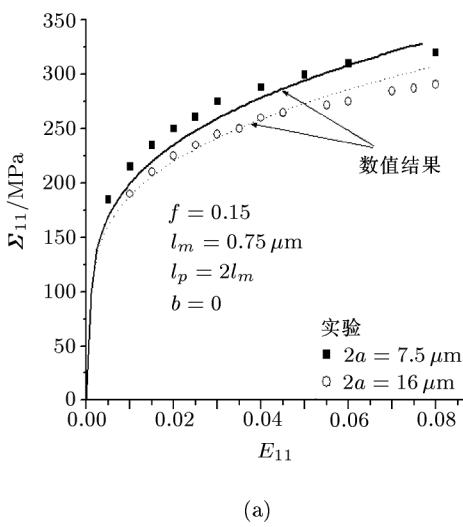
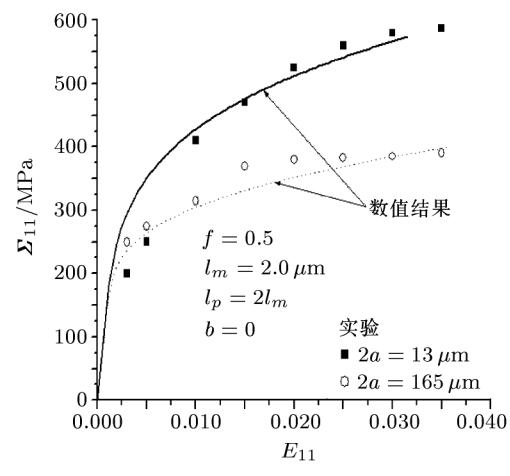


图 9 颗粒尺度和性质对复合材料非线性应力应变关系的影响



(a)



(b)

图 10 计算结果与 Lloyd 的实验结果 (a) 和 Yang 等的实验结果 (b) 的比较

与传统细观力学模型相比较, 文中提出的模型对于中心对称各向同性微极基体只多出两个材料常数, 基体的弹性尺度  $l_m$  和塑性尺度  $l_p$ . 当然可以经一步简化令  $l_p = l_m$ , 使所提的理论只有一个尺度参数如基体的特征尺度  $l_m$ . 上述的尺度参数与复合材料中夹杂的体积含量和大小无关, 只取决于基体的本身的微观结构. 对于金属基复合材料, 它应该和基体的晶粒大小在一个量级, 我们的计算也表明这一点. 关于具体确定基体材料本身特征尺度与基体本身微观结构的关系, 这则需要完成第 3.1 节中的宏细观过渡条件下的细观力学分析, 有关这方面的尝试可参见文献 [37], 但这方面的研究还几乎没有开始. 有关微极理论中材料常数(特征尺度)的实验确定方法, 有兴趣的读者可以参见文献 [60] 的综述, 因为本文目的不是讨论微极理论本身, 所以这里就不再展开讨论了.

## 7 微极介质复合材料的普适关系

1992 年, Cherkaev 等<sup>[61]</sup>首次发现对于平面弹性问题将局部柔度产生适当的平移可以保证结构应力分布不发生变化, 该发现通常被称为 CLM 定理. 他们将该性质应用于复合材料代表单元, 由此得到了关于复合材料等效柔度张量的平移性质, 所得的关系与材料的微观结构无关. 上述结果在检验细观力学模型时有着重要的作用, 因为任何一个细观力学模型都应满足这样的普适关系. 上述发现又被许多学者进行推广, 如 Thorpe 和 Jasiuk<sup>[62]</sup>, Dundurs 和 Markenscoff<sup>[63]</sup>, Zheng 和 Hwang<sup>[64,65]</sup>, 他们发现了更普适的应力不变性条件和平移关系. Hu 和 Weng<sup>[66]</sup>最近利用扰动场理论给出了一系列复合材料等效柔度应满足的普适微分方程. 当复合材料局部柔度张量以特定的方式平移, 等效材料的柔度张量也会以同样的方式平移, 而这种平移性与构成复合材料的微观结构无关. 该结果可以解释平面弹性问题中的一些基本现象如: Michell 定理<sup>[67]</sup>, Dundurs 常数<sup>[68]</sup>, 及为什么多孔板的面内模量与基体的 Poisson 比无关等. Hu 和 Weng<sup>[66]</sup>进而证明对于平面任意形状的孔洞或任意取向裂纹构成的各向同性材料, 无论它们的含量是多少, 复合材料的等效 Poisson 比必然是基体 Poisson 比的线性函数, 并且  $\nu_c = \bar{\nu} + \nu_m E_c / E_m$ . 关于平面微极弹性体, Ostoja-Starzewski 和 Jasiuk<sup>[69]</sup>讨论了微极介质复合材料有效性质的平移性关系. 下面我们将 Hu 和 Weng<sup>[66]</sup>关于传统 Cauchy 介质的结果推

广到微极介质构成的复合材料, 代表单元边界上施加均匀应力边界条件  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\Sigma}^S \cdot \mathbf{n}, \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

### 7.1 三维微极复合材料

根据式 (84), 令

$$\delta \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \delta \zeta \mathbf{m}(\mathbf{x}), \quad \delta \mathbf{d}(\mathbf{x}) = \delta \zeta \mathbf{d}(\mathbf{x})$$

这时有

$$\boldsymbol{\Sigma}^S : \frac{d\overline{\mathbf{M}}^S}{d\zeta} : \boldsymbol{\Sigma}^S = \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{m}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{m} : \mathbf{d}(\mathbf{x}) : \mathbf{m} \rangle = \boldsymbol{\Sigma}^S : \overline{\mathbf{M}}^S : \boldsymbol{\Sigma}^S \quad (108)$$

进而得到

$$\frac{d\overline{\mathbf{M}}^S}{d\zeta} = \overline{\mathbf{M}}^S \quad (109)$$

与传统 Cauchy 介质一样, 该式意味着: 如果  $\overline{\mathbf{M}}^S = \Psi(\mathbf{m}, \mathbf{d}, \Xi)$ , 则  $k\overline{\mathbf{M}}^S = \Psi(k\mathbf{m}, kd, \Xi)$ , 其中  $k > 0$ ,  $\Xi$  代表微观结构参数.

### 7.2 二维微极复合材料

令

$$\delta \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \delta \zeta \mathbf{j}, \quad \delta \mathbf{d}(\mathbf{x}) = 0$$

其中  $j_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ , 这时式 (84) 变为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}^S : \frac{d\overline{\mathbf{M}}^S}{d\zeta} : \boldsymbol{\Sigma}^S &= \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{j} : \boldsymbol{\sigma} \rangle = 2\langle \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} \rangle = \\ &2\left\langle \sigma_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) + \sigma_{21} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) \right\rangle = \\ &2\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \sigma_{11} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) \right] + \right. \\ &\left. \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \sigma_{21} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) \right] \right\rangle = \\ &2(\Sigma_{11}^S \Sigma_{22}^S - \Sigma_{12}^S \Sigma_{21}^S) = \boldsymbol{\Sigma}^S : \mathbf{J} : \boldsymbol{\Sigma}^S \end{aligned} \quad (110)$$

其中  $F, \Psi$  是微极介质的应力势函数,  $\mathbf{J}$  的分量表示为  $J_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl} - (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$ .

由此得

$$\frac{d\overline{\mathbf{M}}^S}{d\zeta} = \mathbf{J} \quad (111)$$

与传统材料一致, 它对于任意使  $\mathbf{m} - \zeta \mathbf{j}$  正定的  $\zeta$ , 都有

$$\overline{\mathbf{M}}^S - \zeta \mathbf{J} = \Psi(\mathbf{m} - \zeta \mathbf{j}, \mathbf{d}, \Xi) \quad (112)$$

对于面内各向同性材料构成的面内各向同性复合材料, 上述公式意味当局部材料有如下平移

$$\frac{1}{K} \rightarrow \frac{1}{K} + \zeta, \quad \frac{1}{\mu} \rightarrow \frac{1}{\mu} - \zeta, \quad \frac{1}{\kappa} \rightarrow \frac{1}{\kappa} + \zeta$$

则复合材料的面积和剪切模量也将有如下平移

$$\frac{1}{K_c} \rightarrow \frac{1}{K_c} + \zeta, \quad \frac{1}{\mu_c} \rightarrow \frac{1}{\mu_c} - \zeta$$

这与文献 [69] 的结果一致. 由于篇幅限制, 有关由微极介质构成的复合材料有效柔度所满足的普适微分方程, 这里就不再讨论了.

## 8 结 论

本文讨论了不同尺度关系下的宏细观过渡的解析方法, 重点讨论了尺度关系满足  $L \gg l \gg A \approx l_m$  时, 将基体材料看作微极介质, 而所构成的复合材料仍可看作传统的 Cauchy 介质时的解析细观力学方法. 这样一类细观力学方法适用于分析基体材料的微观结构特征尺度大于或与夹杂的尺度相当当时复合材料的有效性质: 如金属基复合材料, 泡沫基复合材料和纳米复合材料. 对于这样一类复合材料, 基体性能的非局部性必须加以考虑.

针对非均质微极介质, 通过定义一套宏细观过渡方法及利用微极介质的 Eshelby 解, 本文提出了平均等效夹杂方法并将传统 Cauchy 介质细观力学的 Mori-Tanaka 方法和细观塑性二阶矩方法, 推广到由非均匀微极介质构成的复合材料. 该方法可以成功地预测夹杂尺度对复合材料宏观弹塑性性能的影响, 并且可以看成是传统 Cauchy 介质细观力学在微极介质中的自然推广, 当  $A \gg l_m$  时, 该方法自然退化成传统的细观力学方法.

由于非均匀高阶连续介质细观力学的研究刚刚起步, 许多问题还没有完全定论. 作者只是就自己的理解, 针对尺度关系  $L \gg l \gg A \approx l_m$  时, 将基体材料看作微极介质, 给出了相应宏细观解析分析的一种方法. 将基体看作其他高阶介质如微膨胀介质(更适用于泡沫基复合材料)<sup>[70]</sup>, 或其他尺度关系下的宏细观分析方法, 本文没有涉及. 但我们相信随着人们对微小尺度构件研究的深入, 这一类问题将会越来越受重视.

**致谢** 在作者对上述问题的研究过程中得到了许多同行和朋友的帮助和讨论, 这里特别要感谢的是黄筑平教授、郑泉水教授、魏悦广和陈少华研究员以及 S. Forest 教授和 G.J.Weng 教授.

## 参 考 文 献

- 1 郑泉水, 黄克智等. 世纪之交的力学——参加第 20 届国际理论与应用力学大会有感. 力学进展, 2001, 30(3): 478~480
- 2 Torquato S. Random Heterogeneous Materials: Microstructures and Macroscopic Properties. New York: Springer-Verlag, 2002
- 3 Milton G W. The Theory of Composite. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2002
- 4 Namat-Nasser S, Hori M. Micromechanics: Overall properties of heterogeneous Materials. North-Holland: Elsevier, 1993
- 5 Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. La Hague: Martinus Nijhoff, 1982
- 6 Willis J R. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Adv Appl Mech*, 1981, 21:1~78
- 7 Hashin Z. Analysis of composites: A survey. *J Appl Mech* 1983, 50: 481~505
- 8 Nan C W. Physics of inhomogeneous inorganic materials. *Progress in Materials Science*, 1993, 37: 1~116
- 9 Torquato S. Random heterogeneous media: microstructure and improved bounds on effective properties. *Appl Mech Rev*, 1991, 44: 37~75
- 10 Buryachenko V A. Multiparticle effective field and related methods in micromechanics of composites materials. *Appl Mech Rev*, 2001, 54: 1~47
- 11 王自强, 段祝平. 塑性细观力学(《力学丛书》). 北京: 科学出版社, 1995
- 12 Yang W, Lee W B. Mesoplasticity and Its Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1993
- 13 杜善义, 王彪. 复合材料细观力学基础. 北京: 科学出版社, 1999
- 14 冯西桥, 余寿文. 准脆性材料细观损伤力学. 北京: 高教出版社, 2002
- 15 吴林志, 杜善义, 石志飞. 含夹杂复合材料宏观性能研究. 力学进展, 1995, 25(3): 410~423
- 16 胡更开, 郑泉水, 黄筑平. 复合材料有效性质分析方法. 力学进展, 2001, 31(3): 361~393
- 17 Jasiuk J, Ostoja-Starzewski M. Planar cosserat elasticity of materials with holes and intrusions. *Appl Mech Rev*, 1995, 48: 11~18
- 18 Voigt W. Theoretische studien über die elastizitätsverhältnisse der kristalle. *Abh Ges Wiss Gottingen*, 1887, 34: 3~51
- 19 Cosserat E, Cosserat F. Théorie Des Corps Déformables. Paris: Hermann, 1909
- 20 Truesdell C, Toupin R A. The Classical Field Theories. Encyclopedia of Physics 3 (1). Berlin: Springer-Verlag, 1960
- 21 Mindlin R D, Tiersten H F. Effects of couple stresses in linear elasticity. *Arch Rational Mech Analysis*, 1962, 11: 415~448
- 22 Eringen A C. Theory of micropolar elasticit. In: Liebowitz H, ed. Fracture Mechanics, An Advanced Treatise 2. New York: Academic Press, 1968. 621~729
- 23 Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press, 1986
- 24 戴天民. 广义连续统场论的现状和展望. 力学进展, 1999, 29: 1~8

- 25 Fleck N A, Hutchinson J W. Strain gradient plasticity. *Advances in Applied Mechanics*, 1997, 33: 295~361
- 26 Gao H, Huang Y, Nix W D, Hutchinson J W. Mechanism-based strain gradient plasticity—I theory. *J Mech Phys Solids*, 1999, 47(12): 1239~1263
- 27 Huang Y, Gao H, Nix W D, Hutchinson J W. Mechanism-based strain gradient plasticity—II Analysis. *J Mech Phys Solids*, 2000, 48(1): 99~128
- 28 Chen S H, Wang T. Strain gradient theory with couple stress for crystalline solids. *Eur J Mech A/Solids*, 2001, 20(7): 739~756
- 29 Afantis E C. Gradient deformation models at nano, micro, and macro scales. *ASME J Engng Mater Technol*, 1999, 121(1): 189~202
- 30 Eringen A C. Microcontinuum, Field Theory. Springer, 1999
- 31 Beran M J, McCoy J. Mean field variations in a statistical sample of heterogeneous linearly elastic solids. *Int J Solids Structures*, 1970, 6(10): 1035~1054
- 32 Luciano R, Willis J R. Bounds on non-local effective relations for random composites loaded by configuration dependent body force. *J Mech Phys of Solids*, 2000, 48(12): 1827~1849
- 33 Zuiker J, Dvrok G J. The effective properties of functionally graded composites-I: Extension of the Mori-Tanaka method to linearly varying fields. *Composite Engineering*, 1994, 4(1): 19~35
- 34 Forest S, Sab, K. Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mech Res Comm*, 1998, 25(4): 449~454
- 35 Forest S, Barbe F, Cailletaud G. Cosserat modeling of size effects in the mechanical behavior of polycrystals and multi-phase materials. *Int J Solids and Structures*, 2000, 37(18): 7105~7126
- 36 Yuan X, Tomita, Y. Effective properties of cosserat composites with periodic microstructures. *Mechanics Research Communications*, 2001, 28(3): 265~270
- 37 Bouye F, Jasiuk I, Bocvara S, Ostoja-Starzewski, M. A micromechanically based couple-stress model of an elastic orthotropic two-phase composite. *Eur J Mech A/Solids*, 2002, 21(3): 465~481
- 38 Wei Y G. Particulate size effects in the particle-reinforced metal-matrix composites. *Acta Mech Sinica*, 2001, 17(1): 45~58
- 39 Chen S H, Wang T. Size effects in the particle-reinforced metal-matrix composites. *Acta Mechanica*, 2002, 157(1-4): 113~127
- 40 Zhu H T, Zbib H M, Afantis E C. Strain gradient and continuum modeling of size effect in metal matrix composites. *Acta Mechanica*, 1997, 121(1): 165~176
- 41 Nan C W, Clarke D R. The influence of particle size and particle fracture on the elastic/plastic deformation of metal matrix composites. *Acta Mater*, 1996, 44(18): 3801~3811
- 42 Dai L H, Ling Z, Bai, Y L. A strain gradient-strengthening law for particle reinforced metal matrix composites. *Scripta Mater*, 1999, 41(3): 245~251
- 43 Liu X N, Hu G K. A continue micromechanical theory of overall plasticity for particulate composites including particle size effect. *Int J of Plasticity*, 2004 (In press)
- 44 Xun F, Hu G K, Huang Z P. Effective in-plane moduli of composites with a micropolar matrix and coated fibers. *Int J Solids and Structures*, 2004, 41(2): 247~265
- 45 Hu G K, Liu X N, Lu T J. A Variational method for nonlinear micropolar composite. *Mech Mater*, 2004
- 46 German P. La methode des puissances virtuelles en mecanique des milieux continues premiere partie: theorie du second gradient. *Journal de Mecanique*, 1973, 12(2): 235~274
- 47 Lippmann H. Cosserat plasticity and plastic spin. *ASME Appl Mech Rev*, 1995, 48(1): 753~762
- 48 Hu G K. A method of plasticity for general aligned spheroidal void or fiber-reinforced composites. *Int J Plasticity*, 1996, 12(12): 439~449
- 49 Forest S. Homogenization Methods and the Mechanics of Generalized Continua. In: Maugin G, ed. *Geometry, Continua and Microstructure*. Tranvaux en Cours No. 60, Paris: Hermann, 1999. 35~48
- 50 Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problem. *Proc R Soc Lond*, 1957, A241(1): 376~396
- 51 Cheng Z Q, He L H. Micropolar elastic fields due to a spherical inclusion. *Int J Eng Sci*, 1995, 33(3): 389~397
- 52 Cheng Z Q, He L H. Micropolar elastic fields due to a circular cylindrical inclusion. *Int J Eng Sci*, 1997, 35(7): 659~668.
- 53 杨军. TiAl 合金力学性能细观力学分析: [硕士论文]. 北京: 北京理工大学, 2000
- 54 Hu G K. Effect moduli of two-layered spherical inclusions reinforced composites. *J Beijing Institute of Technology*, 1997, 6(1): 59~66
- 55 Qiu Y P, Weng G J. A theory of plasticity for porous materials and particle-reinforced composites. *Int J Plasticity*, 1992, 59(1): 261~268
- 56 Ponte Castaneda P. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composite. *J Mech Phys Solids*, 1991, 39(1): 45~71
- 57 胡更开. 复合材料细观塑性的二阶矩理论及其应用. 见: 杜善义等主编. 复合材料及其结构的力学设计、应用和评价. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2000, 201~216
- 58 Lloyd D J. Particle-reinforced aluminum and magnesium matrix composite. *Int Mater Rev*, 1994, 39(1): 1~23
- 59 Yang J, Cady C, Hu M S, et al. Effects of damage on the flow strength and ductility of a ductile Al-alloy reinforced with SiC particulates. *Acta Metall Mater*, 1990, 38(12): 2613~2619
- 60 Lakes R. Experimental methods for study of cosserat elastic solids and other generalized elastic continua. In: Muhlhaous

- H, ed. Continuum Models for Materials with Micro-Structure. New York: Wiley, 1995. 1~22
- 61 Cherkaev A V, Lurie K A, Milton G W. Invariant properties of the stress in plane elasticity and equivalence classes of composites. *Proc R Soc Lond*, 1992, A438: 519~529
- 62 Thorpe M F, Jasiuk I. New results in the theory of elasticity for two-dimensional composites. *Proc R Soc Lond*, 1992, A438: 531~544
- 63 Dundurs J, Markenscoff X. Invariance of stresses under a change in elastic compliance. *Proc R Soc Lond*, 1993, A443: 289~300
- 64 Zheng Q S, Hwang K C. Two-dimensional elastic compliances of materials with holes and microcracks. *Proc R Soc Lond*, 1997, A453: 353~364
- 65 Zheng Q S, Hwang K C. Reduced dependence of defect compliance on matrix and inclusion elastic properties in two-dimensional elasticity. *Proc R Soc Lond*, 1996, A452: 2493~2507
- 66 Hu G K, Weng G J. A new derivative on the shift property of effective elastic compliances for planar and 3-D composites. *Proc R Soc Lond*, A, 2001, 457: 1675~1684
- 67 Muskhelishvili N I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Groningeng: Noordhoof, 1963: 164~166
- 68 Dundurs J. Effect of elastic constants on stress in a composite under plane deformation. *J Composite Materials*, 1967, 1310~1322
- 69 Ostoja-Starzewski M, Jasiuk I. Stress invariance in planar Cosserat elasticity. *Proc R Soc Lond*, 1995, A451: 453~470
- 70 Liu X N, Hu G K. Inclusion Problem of Microstretch Continuum. *Int J Engng Sci*, 2004 (In press)

## MICROMECHANICS OF HETEROGENEOUS MICROPOLAR MEDIAUMS\*

HU Gengkai LIU Xiaoning XUN Fei

Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081

**Abstract** Different homogenization schemes are discussed in view of the order relations for the different length scales. The emphasis is then placed on the micro-macro transition from local micropolar media to a homogenized Cauchy medium, suitable for the following order relation of the length scales  $L \gg l \gg A \approx l_m$ . The microstructural size effect can be naturally taken into account in the proposed homogenization scheme. This method is useful for the metal matrix composites, foam matrix composites and nanocomposites, in which the microstructural length scales of the matrix are important compared to that of the reinforced phase.

**Keywords** micropolar medium, micromechanics, composite, elastic-plastic property, size effect

---

\* The project supported by the National Nature Sciencd foundation of China (19802003) and the National Excellent Young Scholar Fund of China (10325210).