

复合材料有效弹性性质分析方法*

胡更开

郑泉水

北京理工大学应用力学系, 北京 100081

清华大学工程力学系, 北京 100084

黄筑平

北京大学力学与工程科学系, 北京 100871

摘 要 建立复合材料的有效性质与微结构参数的关联, 是复合材料优化设计的基础. 本文具体针对有效弹性性质, 重点介绍了建立有效性质的基本思路 and 主要分析方法. 首先讨论了代表单元的概念, 然后分别从复合材料有效性质的普适关系、界限理论和近似方法三个不同的视角较全面地介绍了建立非均质材料有效性质的方法、主要结果和最新进展. 重点从构型的概念和微结构分布形式上分析了各种模型间及分析方法之间的联系与差别. 最后还就建立非均质材料有效性质中存在的问题和研究热点做了简单的介绍.

关键词 复合材料, 有效性质, 细观力学, 弹性

1 引 言

对任意给定的材料, 当考察尺度小到一定程度后, 都将呈现出非均匀性; 另一方面, 均匀材料作为材料的一种理性化连续介质模型, 在工程应用上取得了巨大的成功. 材料复合的主要目的, 是利用不同材料相的特殊性, 创造出单一材料所没有的特定性能或难具有的优异性能. 比如在航空工业中广泛应用的碳纤维增强树脂基复合材料, 比模量和比强度 (每单位质量下的弹性模量和强度) 分别可达到钢的 3 倍和 4 倍^[1]. 从微结构上看, 材料复合有 0-3 复合 (如颗粒状复合材料)、1-3 复合 (如纤维增强复合材料)、2-2 复合 (如层状复合材料)、3-3 复合 (如双连通复合材料) 等多种形式. 本文主要考虑颗粒复合材料, 即存在一个基体相, 其它材料相以夹杂或颗粒的形式, 单个单个地被基体相材料所包围. 在材料科学与工程中, 由于复合材料具有相对简单的微结构, 因此该类材料最早进入了可设计阶段. 建立复合材料性质与复合材料的相材料性质和微结构参数的关联, 是实现复合材料设计乃至优化的基础. 近半个世纪以来, 人们在建立这种关联方面, 经过不懈的努力取得了大量的成果. 近十年来, 力学方面以细观力学和非均匀材料的力学为代表, 取得了不少新的重要进展, 成为固体力学方面最为活跃的领域之一^[2]. 本文将以为较统一的观点, 回顾这方面的进展, 同时为兼顾不同读者层面的需求, 对复合材料有效弹性性质分析方法, 作出较为系统的介绍.

绝大多数复合材料的微结构具有不确定或统计的特征. 因此, 在试图建立复合材料性质与复合材料的相材料性质和微结构参数的关联时, 不可能将材料的微结构影响加以完全的刻划.

本稿于 2001-08-06 收到

* 国家自然科学基金 (10032010, 19802003, 19525207, 19891180) 资助项目

存在为数不少的一类性质, 这些性质或多或少与微结构无关, 统称为普适关系. 这一部分内容主要是在近十年间发展起来的, 将在本文的第 3 节加以介绍. 对同一种复合材料而言, 由于复合材料微结构的随机或统计特征, 导致复合材料性质的随机或统计性. 但这种不确定性具有一定的范围, 业已建立了所谓的上下界估计, 能够对这种不确定范围给以一定的限制. 本文作者(以及国内学者)对这部分内容研究不多, 但为了完备性, 我们还是力图就我们的理解, 在第 4 节给以一个简介. 随着对微结构信息更多的了解, 原则上讲可以给出对复合材料性质在平均意义上的更为准确的估计. 与这种诉求相对应, 文献上发展了多种估计方法, 能够考虑越来越多的微结构特征. 这些结果得到了广泛应用, 将在第 5 节给以描述. 从内容本身来看, 上述三个方面可以不分先后地分别阅读. 另外需要指出的是, “有效性质”的概念本身, 却是一个长期没有澄清的问题. 近十年来, 这个问题开始引起人们的关注, 其原因既有来自研究微尺度材料方面的需求, 也有来自简化数值实验方面的驱动. 对这一方面的介绍, 将在第 2 节给出. 有关参考文献, 将在首次具体引用时列出.

2 复合材料有效性质定义

2.1 有效性质和代表单元的概念

考虑如下图 1(a) 所示由某种复合材料所制备的一个承载结构. 将该结构某微元放大如图 1(b) 所示, 它是由细观非均匀的复合材料构成. 图 2 给出了两种细观非均匀材料的微观结构电镜图片.

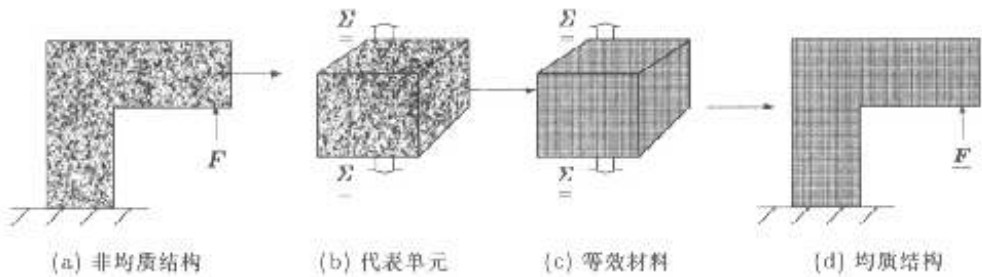


图 1 复合材料结构及代表单元示意图

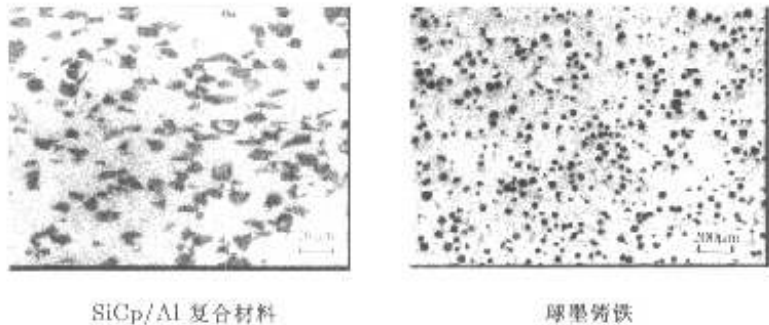


图 2 两种复合材料微结构图片

由于复合材料的微结构分布往往具有统计性, 要在上述结构的力学分析时把复合材料的微结构特点全部考虑进来, 将是很复杂的, 直到最近, 这也是不现实的. 当然, 随着更高性能计算机的出现, 这种可能性可变为现实, 但至今计算成本依然很高, 且对于弹性问题而言没有多大必要. 原因是可以将上述复合材料视为具有所谓有效性质的一种均质材料, 由此求得结构整体

行为, 与将复合材料微结构特征全部考虑后所求得的整体行为的误差在工程许可范围内。

局限于弹性问题, 关于复合材料或更一般的宏观均匀但微观不均匀材料的有效性质 (effective properties) 的定义, 从内容上看至少有三个主要版本^[3]。

本原定义: 实际上微观不均匀的材料能否近似看成为宏观均匀材料的根本判据, 在于这样简化处理后, 可否实现对由该材料构筑的各种工程结构在不同载荷作用下的行为, 实现满意的表征或描述。

试样化定义: 连续介质模型下的均匀材料, 指的是该材料各点具有完全相同的弹性特性; 且长期以来对这些弹性特性的确定, 最终是通过对该材料的大量试样进行实验来完成的; 所谓宏观均匀, 要求的是在试样足够大后, 实验结果的离散性将减小到预定的最大误差范围内。这种能满足最大误差的试样, 即为材料代表单元 (RVE, representative volume element) 的最初概念。

平均化定义: 实际上微观不均匀的材料在各种载荷作用下, 如果对某点而言存在一个邻域, 在该邻域上的应力和应变平均值之间存在与载荷无关 (或相关性可忽略不计) 的关系, 则该关系即为该点的宏观弹性关系。如果该宏观弹性关系在各点一样, 则该材料为宏观均匀材料。上述性质的邻域, 构成了平均化意义下的代表单元概念。

显然, 上述关于宏观均匀性的试样化定义比另外两个定义来得弱。然而, 一方面试样化定义具有现实上的可操作性, 另一方面连续介质模型在过去取得的巨大成功, 充分肯定了试样化定义判定下的宏观均匀材料概念的确具有相当的合理性。平均化定义可以认为是本原定义的一种具体化, 它们在本质上是等价的。然而, 如同 St. Venant 原理一样, 对平均化或本原定义下的宏观均匀材料是否一般存在或有条件存在的严格证明, 看来是不现实的。

在有效弹性性质的平均化和试样化定义之间, 确实可以建立一些基本联系。对于任意一个不受体力作用的试样, 记其体域为 V , V 上应力和应变场分别为 $\underline{\underline{\sigma}}$ 和 $\underline{\underline{\epsilon}}$, 它们在 V 上的平均值分别为 $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$ 和 $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$ 。文中量 $\underline{\underline{a}}$ 表示矢量, $\underline{\underline{a}}$ 表示二阶张量, 黑体符号表示四阶张量。如果边界条件或是如下形式的力边界

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \quad (\partial V \text{ 上}) \quad (2.1)$$

简称为均匀应力边界条件, 或是如下形式的位移边界

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{a}} \quad (\partial V \text{ 上}) \quad (2.2)$$

简称为均匀应变边界条件 (或线性位移边界条件), 其中 $\underline{\underline{\Sigma}}$ 和 $\underline{\underline{E}}$ 是任意给定的常数二阶对称张量, $\underline{\underline{a}}$ 是任意给定的常数矢量, ∂V 为 V 的边界。则分别成立如下关系

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}}, \text{ 或 } \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}} \quad (2.3)$$

进一步, 无论是均匀应力边界还是均匀应变边界条件, 都有以下关系 (也称为 Hill 条件^[4])

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \quad (2.4)$$

即由平均应力和平均应变所构成的功 $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle / 2$ (或称宏观功), 等于 (微观) 功 $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} / 2$ 的平均。

应用数学界采用双尺度或多尺度的方法, 发展了均匀化方法, 获得了丰富的结果。关于这方面的一些著作可参考文献 [5, 6]。中科院计算所崔俊芝院士的研究组最近在该领域也作了大量的工作^[7,8]。该方法主要限制之一, 是要求假设微结构呈周期或准周期性, 好处之一是给出了严格的误差估计。限于篇幅, 本文不具体介绍该方面的内容。

2.2 最小代表单元尺度

长期以来人们对于代表单元的最小尺寸的认识是定性的,如 Lemaitre^[9] 曾粗略地认为代表单元的最小尺寸是: 0.1 mm×0.1 mm×0.1 mm (金属)、1 mm×1 mm×1 mm (高分子和颗粒复合材料)、10 mm×10 mm×10 mm (木材)、或 100 mm×100 mm×100 mm (混凝土). 对于线性弹性材料,在体域为 V 的材料样本边界上分别施加均匀应力或均匀应变边界条件,由此可分别求出 V 上的应变和应力场,以及它们的平均值

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{M}_t : \underline{\Sigma} \text{ 或 } \langle \underline{\sigma} \rangle = \underline{L}_u : \underline{E} \quad (2.5)$$

Huet^[10] 称 $\underline{L}_t = \underline{M}_t^{-1}$ 和 $\underline{L}_u$ 分别为力边界和位移边界条件下的表观模量 (apparent moduli), 研究了这些表观模量与 V 的尺度 d 的关系, 发现随着 d 的增大, $\underline{L}_t$ 和 $\underline{L}_u$ 分别趋于下降和增加, 并最终趋于同一值, 见示意图 3(a). 在给定的最大许可误差 (如 5%) δ 下, 如果对所有 $d < d_0$, 都有 $\underline{L}_t$ 和 $\underline{L}_u$ 的相对误差小于 δ , Huet 称该尺度所对应的试样为一个恰当的代表体元, 而 d_0 的下确界为最小代表体元尺度. Ostoja-Starzewski^[11] 具体研究了由颗粒为片状或针状的颗粒复合材料在反平面剪切变形下的表观模量, 发现在 5% 的最大许可误差和颗粒模量约为基体模量的 100 倍的情况下, 最小代表体元的尺度是颗粒尺度的 10 到 20 倍.

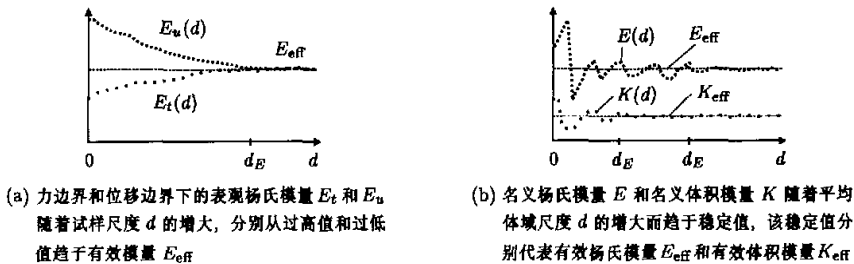


图 3 代表体元的两个等价概念. 关于 E_{eff} 和 K_{eff} 的最小代表体元尺度 d_E 和 d_K 一般并不相等

Drugan 和 Willis^[12] 通过统计理论和非局部理论, 将宏观等效复合材料的本构表示成应力、应变和应变二阶梯度的线性关系, 比较应变二阶梯度的贡献, 他们得出的结论是, 代表单元只含一两个夹杂即具有代表性. Gusev^[13] 通过数值的方法, Luciano 和 Willis^[14] 利用非局部方法验证了文 [12] 的结论. Peculan 等^[15] 通过数值的方法研究了一具有微结构的单元分别在均匀应变边界条件和均匀应力边界下的等效刚度, 通过改变单元的大小, 他们认为在两种边界条件下得到的等效刚度相等 (在一定的误差范围内) 时所对应的最小单元大小即为代表单元的最小尺寸. Peculan 等的计算结果表明, 代表单元的大小与微观材料刚度的比值有密切的关系. Zuiker 和 Dvork^[16] 通过在含微结构单元边界上施加线性应变边界条件, 通过扩展的细观力学方法, 得到含有应力、应力梯度及应变和应变梯度的高阶复合材料本构关系. 通过比较高阶项的贡献, 他们也给出了一种估计代表单元大小的方法.

最近, Zheng 的研究组^[17,18] 引进了更加方便进行数值模拟实验的代表体元及其最小尺度的新概念. 前述 Huet 的表观模量和最小代表体元概念, 在实际进行数值模拟实验研究时需要测试从大到小的一系列试样, 且对每个试样需要分别施加均匀应力和均匀应变边界条件. 相对照, Zheng 的概念是仅仅考虑一块大小约为颗粒尺度 100 倍的大试样, 施加均匀应力 (或均匀应变) 边界条件, 求解该边值问题. 然后对大试样中不同点处不同大小的邻域上的已给出的应力和应变场, 求平均值, 对应的模量叫名义模量 (nominal moduli). 显然, 名义模量与平均域的大小和位置有关. 但当平均域尺度 d 增大时, 它们将一致性地趋于同一个稳定值, 此值即为有效模量, 参见图 3(b). 在给定的最大许可误差 δ 下, 如果对所有 $d > d_0$, 名义模量与其稳定值的相

对误差小于 δ , 就称该尺度对应于一个恰当的代表体元大小, 而 d_0 的下确界为最小代表体元尺度. Ren 和 Zheng^[17] 数值实验了代表所有立方多晶的数百种立方多晶, 发现关于杨氏模量的最小代表体元尺度与立方晶体的各向异性程度近似线性相关. 绝大多数立方多晶的最小代表体元尺度约为晶粒尺度的 10 倍.

一般认为代表单元中微尺度应比代表单元尺度至少小一个量级, 这对一般的复合材料是很容易满足的, 在本文以后的分析中我们一般认为存在这样的代表单元.

2.3 复合材料细观力学分析方法

与试样化定义相对应, 在选定复合材料代表单元 (RVE) 后, 复合材料的有效性质即由该代表单元的平均应力与平均应变的关系确定. 通常的作法是对代表单元施加均匀边界条件 (均匀应力 $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}, \forall \underline{\underline{x}} \in \partial \text{RVE}$ 或均匀应变 $\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{x}}, \forall \underline{\underline{x}} \in \partial \text{RVE}$). 作为一块非均匀材料的代表单元, 其中任意一点 $\underline{\underline{x}}$ 的本构可由应变能函数 $\varphi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{x}})$ 作为势函数求得为 $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{x}})$; 或由余能函数作为势函数求得为 $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{x}}) = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{x}})$. 我们知道, 应变能函数和余能函数互为 Legendre-Fenchel 对偶关系^[19]: $\psi(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{x}}) = \sup_{\underline{\underline{\epsilon}}} [\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} - \varphi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{x}})]$. 对于线弹性问题则进一步有 $\varphi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{x}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{l}}(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\epsilon}}, \psi(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{x}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{m}}(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\sigma}}$, 其中 $\underline{\underline{l}}(\underline{\underline{x}})$ 和 $\underline{\underline{m}}(\underline{\underline{x}})$ 为代表单元中点 $\underline{\underline{x}}$ 处的刚度和柔度张量, 它们互逆.

具体求解非均质材料等效应变能和等效余能函数可按照如下方法进行

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(\underline{\underline{E}}) &= \frac{1}{|\text{RVE}|} \inf_{\underline{\underline{u}}^* \in D_E} \int_{\text{RVE}} \varphi(\underline{\underline{u}}^*, \underline{\underline{x}}) dv = \inf_{\underline{\underline{u}}^* \in D_E} \langle \varphi(\underline{\underline{u}}^*, \underline{\underline{x}}) \rangle \\ \overline{\psi}(\underline{\underline{\Sigma}}) &= \frac{1}{|\text{RVE}|} \inf_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in C_E} \int_{\text{RVE}} \psi(\underline{\underline{\sigma}}^*, \underline{\underline{x}}) dv = \inf_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in C_E} \langle \psi(\underline{\underline{\sigma}}^*, \underline{\underline{x}}) \rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中 $\langle \bullet \rangle$ 指某量在代表单元的平均, $\inf$ 指求极小值运算, 许可域 D_E 和 C_E 分别定义为

$$\begin{aligned} D_E &= \{ \underline{\underline{u}} | \underline{\underline{u}} \in C^1, \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{x}}, \forall \underline{\underline{x}} \in \partial \text{RVE} \}, \\ C_E &= \{ \underline{\underline{\sigma}} | \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}, \forall \underline{\underline{x}} \in \partial \text{RVE} \} \end{aligned}$$

其中, C^1 是可微函数集合. 可见, 求解非均质材料有效性质问题实际上是求解在 RVE 上受均匀边界条件的传统结构计算问题. 局部应变和应力势的外凸性保证了相应宏观等效势的外凸性, 并且有 $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \partial \overline{\varphi}(\underline{\underline{E}}) / \partial \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \partial \overline{\psi}(\underline{\underline{\Sigma}}) / \partial \underline{\underline{\Sigma}}$. 可以证明宏观应变和应力势同样满足 Legendre-Fenchel 对偶关系. 在线弹性情况下 $\overline{\varphi}(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{E}}, \overline{\psi}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\Sigma}}$, 其中 $\underline{\underline{L}}, \underline{\underline{M}}$ 分别是复合材料的有效刚度和柔度张量, 且上述对偶关系保证了 $\underline{\underline{L}}, \underline{\underline{M}}$ 互逆. Hill 条件保证了从应力 $\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = (\underline{\underline{L}}_E)^{-1} : \underline{\underline{\Sigma}}$, 或应变 $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{L}}_E : \underline{\underline{E}}$ 边界条件定义的材料有效刚度与前面能量的定义等价 $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}_E = \underline{\underline{L}}_E$.

上述在代表单元上的边值问题求解, 要求事先确切给定代表单元的微结构, 但大多数复合材料的微结构是统计性的. 为了处理这一矛盾, 一般有四种不同的方法和思路: (1) 寻求有效性质所应满足的与材料微结构无关的普适关系; (2) 在有限微结构特征信息的条件下给出有效模量所应满足的界限; (3) 在有限微结构特征信息的条件下给出有效模量的近似解析估计; (4) 针对几种或统计给定的特定微结构采用数值方法求解. 本文将讨论前三种方法, 有关细观计算力学方面的讨论可参见相关文献 (如 [20,21]). 对于所要讨论的三种方法, 为便于读者, 本文在安排上基本保持它们相互独立, 读者可以选取感兴趣的部分直接阅读.

3 复合材料的普适关系

3.1 主要结果和发展历史概述

在一块均匀各向同性二维弹性体上挖去许许多多孔洞, 外边界以及孔边全部为力边界, 无体力作用, 且每一个孔边所受外力为自平衡的力系. 整个世纪前 Michell (1899)^[22] 证明了上述问题的应力场与材料的杨氏模量和泊松比无关, 且对任意给定孔的形状、大小、分布以及外边界形状的均匀各向同性二维弹性体, 上述无关性均成立. 这一普适性质的一个重要应用领域是光弹性问题, 从而可以采用固定的一种各向同性光弹性材料实验表现出各种不同各向同性弹性材料的复杂应力场. 1967 年 Dundurs^[23] 得到了另一个重要发现. 他证明了由两种均匀各向同性弹性材料通过理想界面复合而成的二维非均匀材料的应力边值问题, 其应力场并非取决于两种材料的所有 4 个弹性常数, 而仅仅取决于两个无量纲的参数, 如

$$\alpha = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}, \quad \beta = \frac{(1 - \nu_2)E_1 - (1 - \nu_1)E_2}{2(E_1 + E_2)}$$

其中 E_i 和 ν_i ($i = 1, 2$) 分别为第 i 种材料的杨氏模量和泊松比. 上述特定的两个参数称作为 Dundurs 参数. 与前述 Michell 定理类似, Dundurs 的发现的重要性同样在于它的普适性, 以及作为两相复合材料进行实验和数值模拟研究的基础.

1992 年 Dai 等^[24] 数值模拟了含圆孔的各向同性板作为二维弹性体的有效弹性模量. 他们发现, 当圆孔的分布使得有效材料也成为各向同性体时, 有效杨氏模量与材料本身的泊松比无关. 利用 Michell 定理, Zheng 和 Hwang^[25] 证明较该发现更为一般的性质, 即对于含任意形状和密度的孔洞以及裂纹的各向同性板的有效弹性问题, 其有效柔度张量 M 相对于基体的柔度张量 M_0 的增量 $H = M - M_0$ 与基体的杨氏模量 E_0 的乘积 $E_0 H$, 完全与基体弹性模量 E_0 和基体泊松比 ν_0 无关, 且这种无关性对所含孔洞任意密度、形状、大小和分布等都普遍成立. Zheng 和他的合作者^[26~28] 还将上述无关性推广到任意多相、理想或弹簧界面的电磁热弹性广义平面问题, 如由由各向同性基体材料和 N 种各向同性材料的夹杂所形成的二维颗粒复合材料, 柔度增量 $H = M - M_0$ 与基体的杨氏模量 E_0 的乘积 $E_0 H$, 仅仅取决于 N 对 Dundurs 参数

$$\alpha_i = \frac{E_0 - E_i}{E_0 + E_i}, \quad \beta_i = \frac{(1 - \nu_i)E_0 - (1 - \nu_0)E_i}{2(E_0 + E_i)}$$

而非有关 $(N + 1)$ 种基体和夹杂材料的 $2(N + 1)$ 个独立弹性常数. Yang 和 Ma^[29] 表明, 二维正交材料含任意孔洞和裂纹问题的 $E_0 H$, 形式上仅依赖于一个材料参数, 而二维正交材料一般含 4 个独立弹性常数.

同样是为对上述 Day 等的发现作出理论解释或证明, Cherkaev 等^[30] 获得了另一种重要性质. 他们证明了, 对具有随位置点光滑变化的弹性性质的二维各向同性弹性材料力边值问题, 将材料的局部柔度张量 m 按下述称为 CLM 形式的平移

$$m \rightarrow m + \lambda J \quad (3.1)$$

其中 J 的分量表示为 $J_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl} - (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$, δ_{ij} 为 Kronecker 符号, λ 是可以保证 $m + \lambda J$ 具有正定性的任意常数, 则上述新材料对应同样力边界的应力场, 与原问题的应力场完全一样. 上述材料变换可以解释为^[30,31] 对二维面积模量 K 和剪切模量 G 分别作如下变换

$$K^{-1} \rightarrow K^{-1} + 2\lambda, \quad G^{-1} \rightarrow G^{-1} - 2\lambda$$

Dundurs 和 Markenscoff^[31] 证明了上述不变性对含各种形状孔洞的具有光滑变化的非均匀二维各向同性弹性材料力边值问题同样成立, 且变换形式推广为

$$m \rightarrow m + \lambda(1 + h_1 x_1 + h_2 x_2)J \quad (3.2)$$

其中 h_1 和 h_2 为任意常数, x_1 和 x_2 为两个笛卡儿坐标. 上述线性变换不变性定理的一个有趣推论是, 对于一块任意形状的二维均匀材料, 如果边界条件为任意给定的力边界, 则将该材料按式 (3.2) 的形式改为线性变化的非均匀材料而不改变力边界条件, 则两个问题的应力场完全相同.

Moran 和 Gosz^[32] 将 Cherkaev 等^[30] 的结果推广到理想或弹簧界面的含夹杂情形. Thorpe 和 Jasiuk^[33] 表明变换 (3.1) 下的应力不变性隐含了 Michell 定理、Dundurs 参数、以及一些上下界性质. Zheng 和 Chen^[27,28] (参见 Chen^[34], He^[35], Du 和 Zheng^[36]) 对于具有分片光滑、理想界面或弹簧界面的电磁热弹性广义平面问题, 求得了具有应力、电位移和磁感应场的不变性的最为一般的材料参数变换, 并由此将关于两相材料的 Dundurs 定理推广到任意多相材料. Du 和 Zheng^[36] 表明对力边界和电位移边界问题, 弹性张量和压电张量的完全对称部分才起作用, 从而部分地回答了已存在一个多世纪的 Cauchy-Voigt 独立弹性常数个数的争辩. 上述不变性研究的还被推广到平面 Cosserat 弹性体^[37].

然而, 将上述二维或广义二维问题的不变性、材料参数独立性或材料参数减弱依赖性往三维问题的推广的努力, 如 Du 和 Zheng^[36] 和 Norris^[38] 的工作, 则未能一般性地取得成功. Du 和 Zheng 表明等截面柱体的扭转具有某种关于泊松比的独立性, 但等截面梁的问题则没有这种无关性. Du 和 Zheng^[39] 在 CLM 变换基础上, 提出了一种内禀广义自治法.

关于上述有关复合材料等效柔度张量平移规律 (3.1), Hu 和 Weng^[40] 最近给出了一种简洁推导方法, 它主要根据 Hill 条件和扰动场理论而不是直接应用应力不变性条件. 下面展示这一推导, 并给出几个进一步的应用例子. 更全面的应用开参见文献 [25,26]. 本节最后还将给出一系列复合材料等效柔度应满足的普适的微分方程^[40].

3.2 等效柔度张量的平移性质的一个简单证明

3.2.1 Hill 条件和扰动理论

从第 2 节知复合材料代表单元起到从微观到宏观过渡的桥梁作用. 在复合材料代表单元边界上可施加均匀应力 $\underline{\underline{\Sigma}}$ 或均匀应变 $\underline{\underline{E}}$. 根据 Hill 条件对于任意 $\underline{\underline{\sigma}} \in C_E$, 或 $\underline{\underline{\epsilon}} \in D_E$, 有 $\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$. 不失一般性下面研究均匀应力边界条件, 在这种情况下有

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} \quad (3.3)$$

其中 $\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$. 利用等效柔度张量 $\underline{\underline{M}}$ 和局部柔度张量 $\underline{\underline{m}}$, 式 (3.3) 可以表示为

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{m}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.4)$$

根据由 Bobeth 和 Diener^[41], Kreher 和 Pompe^[42] 提出的扰动理论 (参见 Hu^[43]), 让局部柔度张量产生一个变分 $\delta \underline{\underline{m}}$ 同时保持外载 $\underline{\underline{\Sigma}}$ 不变, 由式 (3.4) 可得

$$2\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{m}} : \delta \underline{\underline{\sigma}} \rangle + \langle \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{m}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \delta \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.5)$$

由于 $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{m}}$ 是协调应变场, 而 $\delta \underline{\underline{\sigma}}$ 是平均应力为零的静定场, 利用 Hill 条件可证明 $\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{m}} : \delta \underline{\underline{\sigma}} \rangle = 0$. 因此对于任意局部柔度的变化 $\delta \underline{\underline{m}}$, 下式成立

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{m}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \delta \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.6)$$

该关系是普适的, 它将是下面推导等效柔度张量平移性质的关键.

3.2.2 三维复合材料的普适关系

一般性地, 有效柔度张量总可以表达为 $M = \Psi(m, \Xi)$, 其中 m 为局部柔度增量, Ξ 表示微观结构参数. 特别地, 如果想象如下新的局部柔度 km , 其中 k 是任意常数, 则有 $\delta(km) = (\delta k)m$. 由式 (3.6) 得

$$\delta k \langle \underline{\sigma} : m : \underline{\sigma} \rangle = \underline{\Sigma} : \delta \Psi(km, \Xi) : \underline{\Sigma} \quad (3.7)$$

因此

$$\langle \underline{\sigma} : m : \underline{\sigma} \rangle = \underline{\Sigma} : M : \underline{\Sigma} = \underline{\Sigma} : \frac{\partial \Psi(km, \Xi)}{\partial k} : \underline{\Sigma} \quad (3.8)$$

上式对任意 $\underline{\Sigma}$ 成立, 因此得

$$\frac{\partial \Psi(km, \Xi)}{\partial k} = M = \Psi(m, \Xi) \quad (3.9)$$

从而证明了 $M = \Psi(km, \Xi)$ 是 k 的奇一次函数. 特别地, 如果 $k > 0$, 则有 $kM = \Psi(km, \Xi)$. 上述关系适用于任何复合材料, 这与 Zheng 和 Huang^[26] 通过其他方法得到的结论一致.

3.2.3 二维平面复合材料

对二维复合材料, 让局部柔度张量产生式 (3.1) 形式的 CLM 平移, 则有

$$\langle \underline{\sigma} : J : \underline{\sigma} \rangle = \underline{\Sigma} : \frac{\partial M}{\partial \lambda} : \underline{\Sigma} = \underline{\Sigma} : \frac{\partial \Psi(m + \lambda J, \Xi)}{\partial \lambda} : \underline{\Sigma} \quad (3.10)$$

利用平面弹性理论, 以下关系式成立

$$\begin{aligned} \langle \underline{\sigma} : J : \underline{\sigma} \rangle &= 2 \langle \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12} \sigma_{12} \rangle = 2 \langle \sigma_{11} \varphi_{,11} + \sigma_{12} \varphi_{,12} \rangle = \\ &= 2 (\Sigma_{11} \Sigma_{22} - \Sigma_{12} \Sigma_{12}) = \underline{\Sigma} : J : \underline{\Sigma} \end{aligned} \quad (3.11)$$

对单连通域 (包括光滑变化的材料), 用平衡方程, 高斯定理和 Airy 应力函数 φ 即可简单得到上述关系. 如果是多连通域、或多相材料, 则推导较复杂. 详细由 Zheng 和 Chen^[27,28] 给出, 他们证明了上述关系以及下面的关系对于局部柔度为任意各向异性、分片光滑、具有理想或弹黄界面的平面复合材料都成立. 因此我们可以得到

$$\frac{\partial \Psi(m + \lambda J, \Xi)}{\partial \lambda} = J \quad (3.12)$$

对 λ 积分就得到

$$\Psi(m + \lambda J, \Xi) = \Psi(m, \Xi) + \lambda J \quad (3.13)$$

上述结果与文 [26] 所得到的关系一致. 特别地, 如果 m 由各向同性基体和夹杂的两相材料构成, 这时 $m_0 = (I - \nu_0 J)/E_0$, $m_1 = (I - \nu_1 J)/E_1$. 令 $\lambda = \nu_0/E_0$, 有 $m_0 + \lambda J = 1/E_0$, $m_1 + \lambda J = (\eta I + \zeta J)/E_0$, 其中 $I_{ijkl} = (1/2)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ 为四阶单位张量, $\eta = E_0/E_1$, $\zeta = \nu_0 - \nu_1 E_0/E_1$ 是两个与 Dundurs 参数 α 和 β 等价的无量纲参数^[26]. 再利用性质 (3.9), 则由式 (3.13) 得出 $E_0 M + \nu_0 J$ 是一个仅仅依赖于 η 和 ζ 两个材料参数的所谓材料参数减弱依赖性^[26].

3.2.4 平面含孔洞和裂纹材料

对均匀各向同性基体中含裂纹和孔洞的两维材料, 假设裂纹没有闭合效应, 孔洞的体积百分比记为 c . 由式 (3.6) 变为

$$(1 - c) \langle d(1/E_0) \underline{\sigma} : \underline{\sigma} - d(\nu_0/E_0) \underline{\sigma} : J : \underline{\sigma} \rangle_0 = \underline{\Sigma} : dM : \underline{\Sigma} \quad (3.14)$$

其中 $\langle \bullet \rangle_0$ 代表对基体材料的体平均, 下面保持 E_0 不变使 ν_0 产生一个变分 $d\nu_0$. 利用式 (3.11), 或 $(1-c)\langle \underline{\sigma} : \underline{J} : \underline{\sigma} \rangle_0 = \langle \underline{\sigma} : \underline{J} : \underline{\sigma} \rangle = \underline{\Sigma} : \underline{J} : \underline{\Sigma}$, 则由式 (3.14) 得到

$$\underline{\Sigma} : \left(\frac{\partial \underline{M}}{\partial \nu_0} + \frac{1}{E_0} \underline{J} \right) : \underline{\Sigma} = 0 \quad (3.15)$$

进而对任意含孔洞或裂纹的平面弹性体有

$$\frac{\partial \underline{M}}{\partial \nu_0} + \frac{1}{E_0} \underline{J} = 0 \quad (3.16)$$

当面内性质为各向同性, $\underline{M} = (1/E_c)(\underline{I} - \nu_c \underline{J})$, 式 (3.16) 又可进一步写成

$$\frac{\partial(1/E_c)}{\partial \nu_0} = 0, \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \nu_0} = \frac{E_c}{E_0} \quad (3.17)$$

第一个方程表明等效杨氏模量与基体的泊松比无关. 上两式又表明复合材料等效泊松比 ν_c 是基体泊松比 ν_0 的线形函数, 比例系数为 E_c/E_0 .

如果孔洞分布使得等效材料为正交异性, E_1 和 E_2 表示面内杨氏模量, ν_{12} 为泊松比, G_{12} 为剪切模量, 由式 (3.16) 可得

$$\frac{\partial(1/E_1)}{\partial \nu_0} = 0, \quad \frac{\partial(1/E_2)}{\partial \nu_0} = 0, \quad \frac{\partial(\nu_{12}/E_1)}{\partial \nu_0} = \frac{1}{E_0}, \quad \frac{\partial(1/2G_{12})}{\partial \nu_0} = \frac{1}{E_0} \quad (3.18)$$

这样面内等效杨氏模量与基体的泊松比无关, 而 $1/G_{12}$ 和 ν_{12} 是基体泊松比 ν_0 的线性函数.

上述结果适用于平面应力和平面应变情况, 应提的是从三维横向同性材料计算面内量 E_c , ν_c , k_c 和 μ_c 时与平面应力和平面应变条件有关. 如面 1-2 为各向同性, 并记 $E_1 = E_2 = E_T$ 及 $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu_T$, 在平面应力下有

$$E_c = E_T, \quad k_c = \frac{E_T}{2(1-\nu_T)}, \quad \nu_c = \nu_T, \quad \mu_c = \frac{E_T}{2(1+\nu_T)} \quad (3.19)$$

在平面应变下是

$$E_c = \frac{E_T}{1-\nu_{13}\nu_{31}}, \quad k_c = \frac{E_T}{2(1-\nu_T-2\nu_{13}\nu_{31})}, \quad \nu_c = \frac{\nu_T + \nu_{13}\nu_{31}}{1-\nu_{13}\nu_{31}}, \quad \mu_c = \frac{E_T}{2(1+\nu_T)} \quad (3.20)$$

式中泊松比 ν_{13} 指由于 1 方向拉伸在 3 方向引起的应变, 同样对 ν_{31} .

3.3 各向同性材料构成复合材料柔度张量的普适微分方程

3.3.1 三维弹性体

对于各向同性材料, 其能量密度可以写成如下形式

$$w_i = a_i \sigma^2 + b_i \underline{s} : \underline{s} \quad (3.21)$$

其中 σ 是静水压力, 定义为 $\sigma = (1/3)\sigma_{kk}$ (k 从 1 到 3), $\underline{s}$ 是应力偏量. 常数 a_i 和 b_i 与第 i 种材料的体积和剪切模量 κ_i 和 μ_i 通过如下关系联系 $a_i = 1/(2\kappa_i)$ 和 $b_i = 1/(4\mu_i)$.

下面让 a_i 和 b_i 分别产生独立的变分 δa_i 和 δb_i . 另外考虑到式 (3.4) 代表两倍的弹性能密度, 从普适关系 (3.6) 得

$$2c_i \delta a_i \langle \sigma^2 \rangle_i = \underline{\Sigma} : \delta \underline{M} : \underline{\Sigma}, \quad 2c_i \delta b_i \langle s : s \rangle_i = \underline{\Sigma} : \delta \underline{M} : \underline{\Sigma} \quad (3.22)$$

其中 c_i 代表第 i 相材料的体积百分比; $\langle \bullet \rangle_i$ 代表某量在第 i 相的体积平均. 由此得

$$2c_i \langle \sigma^2 \rangle_i = \underline{\underline{\Sigma}} : \frac{\partial M}{\partial a_i} : \underline{\underline{\Sigma}}, \quad 2c_i \langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \rangle_i = \underline{\underline{\Sigma}} : \frac{\partial M}{\partial b_i} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.23)$$

由于复合材料由各向同性材料组成, 有

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle = 2 \sum_i \left[c_i a_i \langle \sigma^2 \rangle_i + c_i b_i \langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \rangle_i \right] = \underline{\underline{\Sigma}} : \left[\sum_i a_i \frac{\partial M}{\partial a_i} + b_i \frac{\partial M}{\partial b_i} \right] : \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}} : M : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.24)$$

这样我们就得到如下关于三维复合材料等效柔度张量所满足的微分方程

$$\sum_i \left[a_i \frac{\partial M}{\partial a_i} + b_i \frac{\partial M}{\partial b_i} \right] = M \quad (3.25)$$

该微分方程的性质表明等效柔度张量 M 应是变量 a_i 和 b_i 的一阶齐次函数, 因此可以说该式等价于式 (3.9). 对于由各向同性材料构成的各向同性复合材料, 式 (3.25) 可表示为

$$\kappa = \sum_i \left[\kappa_i \frac{\partial \kappa}{\partial \kappa_i} + \mu_i \frac{\partial \kappa}{\partial \mu_i} \right], \quad \mu = \sum_i \left[\mu_i \frac{\partial \mu}{\partial \mu_i} + \kappa_i \frac{\partial \mu}{\partial \kappa_i} \right] \quad (3.26)$$

其中 κ, μ 表示复合材料的有效体积和剪切模量.

3.3.2 二维复合材料

对于二维复合材料, 各组分材料为各向同性, 令 $\sigma = (1/2)\sigma_{kk}$ (k 从 1 到 2) 及 $a_i = 1/(2k_i)$, 其中对于平面应力状态有 $k_i = E_i/[2(1-\nu_i)]$; 对于平面应变条件为 $k_i = E_i/[2(1+\nu_i)(1-2\nu_i)]$. 由于有 $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{J}} : \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{J}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \langle 2\sigma^2 - \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \rangle$, 从式 (2.23) 得

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \left[\sum_i 2 \frac{\partial M}{\partial a_i} - \frac{\partial M}{\partial b_i} \right] : \underline{\underline{\Sigma}} = 2 \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{J}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.27)$$

因此二维复合材料的等效柔度张量满足如下偏微分方程

$$\sum_i \left[2 \frac{\partial M}{\partial a_i} - \frac{\partial M}{\partial b_i} \right] = 2J \quad (3.28)$$

对于由各向同性材料构成的面内各向同性复合材料, 上式可写成

$$\sum_i \left[\frac{\partial(1/k)}{\partial(1/k_i)} - \frac{\partial(1/k)}{\partial(1/\mu_i)} \right] = 1, \quad \sum_i \left[\frac{\partial(1/\mu)}{\partial(1/\mu_i)} - \frac{\partial(1/\mu)}{\partial(1/\kappa_i)} \right] = 1 \quad (3.29)$$

3.4 有关讨论

基本关系式 (3.6) 告诉我们不可能只产生局部柔度张量的变化而保持等效柔度不变, 因为对于任意 $d\mathbf{m}$ 总有 $\underline{\underline{\sigma}} : d\mathbf{m} : \underline{\underline{\sigma}} \geq 0$, 因此对于任意 $\underline{\underline{\Sigma}} \neq 0$ 总有 $dM \neq 0$. 这里需要强调的是该节所得到的关系式是普适的, 任何细观力学模型都应满足上述普适关系. Zheng 在 1996 年 ICTAM 的报告中指出, 除广义自治法外^[39], 其它现有细观力学方法与上述普适关系不矛盾. 最后应提的是上述关系意味着有效模量或柔度与组成材料的性质存在一定的限制关系, 这种限制关系与后面将谈到的界限性质是否有一定的关联? 这些问题目前还没有明确的答案.

4 复合材料的界限理论

4.1 分析界限的方法

在第3节, 我们讨论了复合材料有效性质应满足的一些普适关系, 这些关系与材料的微结构形状和分布无关. 复合材料有效性质本身与材料的微观结构形式和分布密切相关, 由于实际上很难得到全部有关复合材料的微结构信息, 因此给出精确的有效性质的预测几乎是不可能的. 细观力学实际上是根据材料微结构的有限信息给出材料有效性质应满足的范围或给出其近似预测, 本节我们将讨论如何给出非均质材料有效性质所满足的范围或上下界限, 在第5节将讨论分析有效性质的近似方法.

4.1.1 Voigt 和 Reuss 界限

下面考察在代表单元 RVE 边界上施加线性位移载荷 $\underline{u}^d = \underline{E} \cdot \underline{x}$, $\forall \underline{x} \in \partial \text{RVE}$, 忽略体力影响. 将最小势能原理应用于该问题有: $\Phi(\underline{u}) = |\text{RVE}| \bar{\varphi}(\underline{u}) \leq \Phi(\underline{u}^*) = |\text{RVE}| \bar{\varphi}(\underline{u}^*)$, 其中 $\forall \underline{u}^* \in D_E$. 为以后讨论方便令 $|\text{RVE}| = 1$, $\underline{u}$ 是上述问题的真实解, 根据定义有 $\bar{\varphi}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \underline{E} : \underline{L} : \underline{E}$, $\underline{L}$ 是复合材料有效刚度. 在 D_E 中选取所研究问题的位移协调场时, 最简单的可令 $\underline{u}^* = \underline{E} \cdot \underline{x}$, $\forall \underline{x} \in \text{RVE}$, 这样有 $\bar{\varphi}(\underline{u}^*) = \frac{1}{2} \underline{E} : \langle \underline{l} \rangle : \underline{E} = \frac{1}{2} \underline{E} : \underline{L}_V : \underline{E}$, 其中 $\underline{l}$ 是代表单元局部刚度张量. 对于任意 $\underline{E}$, 根据前面不等式有: $\frac{1}{2} \underline{E} : (\underline{L} - \underline{L}_V) : \underline{E} \leq 0$. 该不等式实际给出了复合材料的有效刚度应满足的一个上限 $\underline{L}_V = \langle \underline{l} \rangle$, 即 Voigt 上限^[44]. 同样在代表单元施加应力边界条件, 利用最小余能原理可得有效刚度应大于下限 $\underline{L}_R = \langle \underline{l}^{-1} \rangle^{-1}$, 即 Reuss 下限. 这样对于任意复合材料总有: $\underline{L}_R \leq \underline{L} \leq \underline{L}_V$. 从前面的分析可以看出只要能构造出位移协调场 $\underline{u}' \in D_E$, 就可得到非均质材料有效刚度所应满足的一个上限, 类似地, 只要能构造出许可应力场 $\underline{\sigma}' \in C_E$, 就可得到非均质材料有效刚度所应满足的一个下限. 然而, 对于非均质材料除了均匀的应力或应变场外, 再构造满足上述问题的协调位移场或静定许可应力场不是一件容易的工作, 为此 Hashin 和 Shtrikman^[45,46] 提出了一个新泛函成功地解决了上述问题. 后来在此基础上又有了许多发展.

4.1.2 Hashin 和 Shtrikman 泛函

Hashin 和 Shtrikman^[45,46] (简记 HS) 实际上给出了对任意结构都适用的一个泛函不等式, 本文只针对所研究的复合材料代表单元, 给出 HS 泛函表达式. 有关界限的讨论, 本文主要参照文献 [47,48] 给出的方法. 考察代表单元在边界上有线性位移载荷 $\underline{u}^d = \underline{E} \cdot \underline{x}$, $\forall \underline{x} \in \partial \text{RVE}$, 令 $\underline{u}^*, \underline{\varepsilon}^* \in D_E$, $\underline{\sigma}^* \in C_{E'}$, $C_{E'} = \{ \underline{\sigma} | \text{div}(\underline{\sigma}) = 0, \forall \underline{x} \in \text{RVE} \}$. 引入均匀参考介质的弹性张量 $\underline{L}_0$, 将上述问题的静定许可应力场 $\underline{\sigma}^*$ 和协调应变场 $\underline{\varepsilon}^*$ 之间的关系, 表达成如下形式: $\underline{\sigma}^* = \underline{L}_0 : \underline{\varepsilon}^* + (\underline{l} - \underline{L}_0) : \underline{\eta}^*$, 其中 $\underline{l}$ 是材料的局部弹性张量, 称 $\underline{\eta}^*$ 为极化应变张量. 显然, 如果上述关系对 $\underline{\eta}^* = \underline{\varepsilon}^*$ 成立, 则 $\underline{u}^*, \underline{\varepsilon}^*$ 和 $\underline{\sigma}^*$ 对应问题的真实解.

下面考察代表单元由均匀参考介质 (对应 $\underline{L}_0$) 构成, 边界条件为 $\underline{u}^d = \underline{E}^0 \cdot \underline{x}$, $\forall \underline{x} \in \partial \text{RVE}$. 记该问题真实解为 $\underline{U}^0, \underline{E}^0$ 和 $\underline{\Sigma}^0$, 势能为 $\bar{\varphi}^0(\underline{U}^0) = \frac{1}{2} \underline{E}^0 : \underline{L}_0 : \underline{E}^0$. 在任意给定 $\underline{\eta}^*$ 的情况下, 令 $\underline{u}^* = \underline{U}^0 + \underline{u}'$, $\underline{\varepsilon}^* = \underline{E}^0 + \underline{\varepsilon}'$ 和 $\underline{\sigma}^* = \underline{\Sigma}^0 + \underline{\sigma}'$. 扰动场 $\underline{u}', \underline{\varepsilon}'$ 和 $\underline{\sigma}'$ 满足 $\underline{u}'$, $\underline{\varepsilon}' \in D_{E'}$, $D_{E'} = \left\{ \underline{u}, \underline{\varepsilon} | \underline{u} \in C^1, \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} + \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} \right)^T \right], \forall \underline{x} \in \text{RVE}; \underline{u} = 0, \forall \underline{x} \in \partial \text{RVE} \right\}$; $\underline{\sigma}' \in C_{E'}$ 并且 $\underline{\sigma}' = \underline{L}_0 : \underline{\varepsilon}' + (\underline{l} - \underline{L}_0) : \underline{\eta}^* = \underline{L}_0 : \underline{\varepsilon}' + \underline{p}^*$.

利用虚功原理有

$$\int_{\text{RVE}} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}'^* dv = \int_{\text{RVE}} [L_0 : (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{E}}^0) + \underline{\underline{p}}^*] : (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{E}}^0) dv = 0 \quad (4.1)$$

$$\int_{\text{RVE}} \underline{\underline{\Sigma}}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}'^* dv = \int_{\text{RVE}} \underline{\underline{E}}^0 : L_0 : (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{E}}^0) dv = 0 \quad (4.2)$$

令 $\bar{\varphi}(\underline{\underline{u}}^*)$ 为所研究非均质材料代表单元在协调位移场 $\underline{\underline{u}}^*$ 时的势能, 则

$$\begin{aligned} 2[\bar{\varphi}(\underline{\underline{u}}^*) - \bar{\varphi}^0(\underline{\underline{U}}^0)] &= \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^* : l : \underline{\underline{\varepsilon}}^* \rangle - \langle \underline{\underline{E}}^0 : L_0 : \underline{\underline{E}}^0 \rangle = \\ &= \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^* : (l - L_0) : \underline{\underline{\varepsilon}}^* \rangle + \langle \underline{\underline{\varepsilon}}'^* : L_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}'^* \rangle = \\ &= \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^* : (l - L_0) : \underline{\underline{\varepsilon}}^* \rangle - \langle \underline{\underline{\varepsilon}}'^* : (l - L_0) : \underline{\underline{\eta}}^* \rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

上式用到了虚功原理 (4.1) 和 (4.2). 对于参考介质 L_0 , 定义 HS 泛函

$$\text{HS}^0(\underline{\underline{\eta}}^*) = \bar{\varphi}^0(\underline{\underline{U}}^0) + \frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\eta}}^* : (l - L_0) : (\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\eta}}^*) \rangle \quad (4.4)$$

这样所研究问题的势能转化为

$$\bar{\varphi}(\underline{\underline{u}}^*) = \text{HS}^0(\underline{\underline{\eta}}^*) + \frac{1}{2} \langle (\underline{\underline{\eta}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}^*) : (l - L_0) : (\underline{\underline{\eta}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}^*) \rangle \quad (4.5)$$

同样对于原问题的余能, 可得

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\underline{\underline{u}}^*) &= \bar{\psi}^0(\underline{\underline{\Sigma}}^0) + \frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\eta}}^* : l : (m - M_0) : (\underline{\underline{\Sigma}}^0 + \underline{\underline{\sigma}}^* - l : \underline{\underline{\eta}}^*) \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle (l : \underline{\underline{\eta}}^* - \underline{\underline{\sigma}}^*) : (m - M_0) : (l : \underline{\underline{\eta}}^* - \underline{\underline{\sigma}}^*) \rangle \end{aligned} \quad (4.6)$$

由于 $\bar{\varphi}^0(\underline{\underline{U}}^0)$, $\bar{\psi}^0(\underline{\underline{\Sigma}}^0)$ 是对应于 RVE 由参考介质 L_0 构成时, 在给定的均匀边界条件下真实解时的势能和余能, 因此 $\bar{\varphi}^0(\underline{\underline{U}}^0) = -\bar{\psi}^0(\underline{\underline{\Sigma}}^0)$. 另外又有 $\langle \underline{\underline{\eta}}^* : l : (m - M_0) : (\underline{\underline{\Sigma}}^0 + \underline{\underline{\sigma}}^* - l : \underline{\underline{\eta}}^*) \rangle = -\langle \underline{\underline{\eta}}^* : (l - L_0) : (\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\eta}}^*) \rangle$, 这样根据最小势能和余能原理有

$$-\Delta_{\psi}^0(\underline{\underline{\eta}}^*) + \text{HS}^0(\underline{\underline{\eta}}^*) \leq -\bar{\psi}(\underline{\underline{u}}) = \bar{W} = \bar{\varphi}(\underline{\underline{u}}) \leq \text{HS}^0(\underline{\underline{\eta}}^*) + \Delta_{\varphi}^0(\underline{\underline{\eta}}^*) \quad (4.7)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_{\psi}^0(\underline{\underline{\eta}}^*) &= \frac{1}{2} \langle (l : \underline{\underline{\eta}}^* - \underline{\underline{\sigma}}^*) : (m - M_0) : (l : \underline{\underline{\eta}}^* - \underline{\underline{\sigma}}^*) \rangle \\ \Delta_{\varphi}^0(\underline{\underline{\eta}}^*) &= \frac{1}{2} \langle (\underline{\underline{\eta}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}^*) : (l - L_0) : (\underline{\underline{\eta}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}^*) \rangle \end{aligned}$$

由式 (4.7) 可以看出对于任意 $\underline{\underline{\eta}}^*$ 有

$$\text{当 } L_0 \geq l \text{ 有 } \text{HS}^0(\underline{\underline{\eta}}^*) \geq \bar{W}; \text{ 当 } M_0 \geq m \text{ 有 } \text{HS}^0(\underline{\underline{\eta}}^*) \leq \bar{W} \quad (4.8)$$

HS 泛函将最小势能和余能原理中构造静定许可场 $\underline{\underline{\sigma}}^*$ 和协调场 $\underline{\underline{u}}^*$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ 问题转化成任意构造极化应变场 $\underline{\underline{\eta}}^*$ 的问题. 这样引入 HS 泛函的好处就显而易见了, 即可通过适当选取参考介

质 L_0 , 并通过任意选取极化应变场 $\underline{\eta}^*$ 就可得到一系列确定的代表单元的上限或下限, 这样成功地避开了选取静定或协调场所遇到的困难.

在 HS 泛函中含有 $\underline{\sigma}^*$, $\underline{\varepsilon}^*$, 它们是任意给定极化应变场 $\underline{\eta}^*$ 后, 针对如下问题的解

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon}^* &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \underline{u}^*}{\partial \underline{x}} + \left(\frac{\partial \underline{u}^*}{\partial \underline{x}} \right)^T \right], \quad \underline{u}^* = \underline{E}^0 \cdot \underline{x}, \quad \forall \underline{x} \in \partial \text{RVE} \\ \text{div}(\underline{\sigma}^*) &= 0, \quad \underline{\sigma}^* = \underline{L}_0 : \underline{\varepsilon}^* + (\underline{l} - \underline{L}_0) : \underline{\eta}^*\end{aligned}$$

因此可通过引入关于参考介质的 Green 函数 $\underline{G}^0(\underline{x}, \underline{x}')$, 将 $\underline{\varepsilon}^*$ 表示成 $\underline{\eta}^*$ 的函数即^[49]

$$\underline{\varepsilon}^* = \underline{E}^0 - \int_{\text{RVE}} \underline{\Gamma}^0(\underline{x}, \underline{x}') : [\underline{l}(\underline{x}') - \underline{L}_0] : \underline{\eta}^*(\underline{x}') d\underline{v}' \quad (4.9)$$

其中 $\underline{\Gamma}_{ijkl}^0 = \left[\frac{\partial^2 G_{ik}^0}{\partial x_j \partial x_l'} \right]_{(i,j)(k,l)}$ 脚标 (i,j) 和 (k,l) 指对称运算.

将式 (4.9) 代入 HS 泛函消去 $\underline{\varepsilon}^*$, 这样 $\text{HS}^0(\underline{\eta}^*)$ 只显含极化应变 $\underline{\eta}^*$, 即

$$\text{HS}^0(\underline{\eta}^*) = \underline{\varphi}^0(\underline{L}^0) +$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \underline{\eta}^* : (\underline{l} - \underline{L}_0) : \left(2 \underline{E}^0 - \underline{\eta}^* - \int_{\text{RVE}} \underline{\Gamma}^0(\underline{x}, \underline{x}') : (\underline{l}(\underline{x}') - \underline{L}_0) : \underline{\eta}^*(\underline{x}') d\underline{v}' \right) \right\rangle \quad (4.10)$$

通过适当选取参考介质后, 任意选取 $\underline{\eta}^*$ 就可利用式 (4.10) 得到非均质材料能量的一个界限.

4.1.3 Hashin-Shtrikman 界限

考察极化应力在每相材料中为常数情况, 即 $\underline{l} = \sum_r \underline{l}_r k_r(\underline{x})$, $\underline{\eta}^* = \sum_r \underline{\eta}_r k_r(\underline{x})$, 其中 r 指第 r 类具有相同形状和取向的夹杂, $k_r(\underline{x})$ 为第 r 相夹杂的特征函数, 即 $\underline{x}$ 属于第 r 相夹杂时为 1, 否则为零. 将上面局部刚度和极化应变代入 HS 泛函, 并注意到 $\int_{\text{RVE}} k_r(\underline{x}) d\underline{v} = c_r$, c_r 是第 r 相材料的体积百分比, 有

$$\begin{aligned}\text{HS}^0(\underline{\eta}^*) &= \frac{1}{2} \underline{E}^0 : \underline{L}_0 : \underline{E}^0 + \frac{1}{2} \sum_r c_r \underline{\eta}_r : (\underline{l}_r - \underline{L}_0) : (2 \underline{E}^0 - \underline{\eta}_r) - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \underline{\eta}_r : (\underline{l}_r - \underline{L}_0) : \underline{A}_{rs}^0 (\underline{l}_s - \underline{L}_0) : \underline{\eta}_s\end{aligned} \quad (4.11)$$

其中 $\underline{A}_{rs}^0 = \int_{\text{RVE}} \int_{\text{RVE}} \underline{\Gamma}^0(\underline{x}, \underline{x}') k_r(\underline{x}) k_s(\underline{x}') d\underline{v} d\underline{v}'$.

考虑到对于均质材料 (参考介质), 格林函数具有平移不变性, 即 $\underline{\Gamma}^0(\underline{x}, \underline{x}') = \underline{\Gamma}^0(\underline{x} - \underline{x}')$, 这样有

$$\begin{aligned}\underline{A}_{rs}^0 &= \int_{\Omega} \int_{\text{RVE}} \underline{\Gamma}^0(-\underline{x}'') k_r(\underline{x}) k_s(\underline{x}'' + \underline{x}) d\underline{v} d\underline{v}'' = \int_{\Omega} \left[\int_{\text{RVE}} k_r(\underline{x}) k_s(\underline{x}'' + \underline{x}) d\underline{v} \right] \underline{\Gamma}^0(-\underline{x}'') d\underline{v}'' = \\ &\quad \int_{\Omega} \underline{\Gamma}^0(-\underline{x}'') \varphi_{rs}(\underline{x}'') d\underline{v}''\end{aligned}$$

其中 $\varphi_{rs}(\underline{x}') = \langle k_r(\underline{x}) k_s(\underline{x} + \underline{x}') \rangle$ 为 $\underline{x}$ 点的二阶关联函数. 根据特征函数的定义有 $\sum_r k_r(\underline{x}) = 1$, 可得 $\sum_s \varphi_{rs} = c_r$. 由于微结构分布是均匀的, 即任意点 $\underline{x}$, $\underline{x} + \underline{x}'$ 的二阶关联函数相等 $\varphi_{rs}(\underline{x}') =$

$\varphi_{rs}(-\underline{x}')$, 另外 $\mathbf{I}^0(\underline{x}') = \mathbf{I}^0(-\underline{x}')$, 这样 $\mathbf{A}_{rs}^0 = \mathbf{A}_{sr}^0$. 对于所要研究的复合材料, 假设微结构没有长程关联性即 $\lim_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} \varphi_{rs}(\underline{x}) = c_r c_s$; 在任何一点有且只有一相材料, $\varphi_{rs}(0) = c_r \delta_{rs}$.

从式 (4.11) 看出如果能计算出 $\mathbf{A}_{rs}^0$, 通过适当选取参考介质 (L_0 , 参见式 (4.8)), 这样任意给出一组 $\underline{\eta}_r$, 就可以给出所讨论的非均质材料有效势能的上限或下限. 自然地可以就式 (4.11) 对于变量 $\underline{\eta}_r$ 进行优化, 给出优化的界限. 令

$$-\frac{\partial \text{HS}^0(\underline{\eta}^*)}{\partial \underline{\eta}^*} = c_r(l_r - L_0) : \underline{\underline{E}}^0 - c_r(l_r - L_0) : \underline{\underline{\eta}}_r - (l_r - L_0) : \sum_s \mathbf{A}_{rs}^0 : (l_s - L_0) : \underline{\underline{\eta}}_s = 0$$

如当 $l_r = L_0$ 时, 令 $\underline{\eta}_r = 0$. 这样优化的 $\underline{\eta}_r$ 由下列方程组求得

$$\underline{\eta}_r + \frac{1}{c_r} \sum_s \mathbf{A}_{rs}^0 : (l_s - L_0) : \underline{\eta}_s = \underline{\underline{E}}^0 \quad (4.12)$$

确定极化应变 $\underline{\eta}_r$ 后, 非均质材料有效刚度的 HS 界限可通过对式 $\underline{\underline{\sigma}} = L_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} + (l - L_0) : \underline{\underline{\eta}}$ 求平均得到, 即 $\underline{\underline{S}} = L_0 : \underline{\underline{E}} + \sum_r c_r(l_r - L_0) : \underline{\eta}_r$.

可以看出, 按照该方法计算非均质材料势能的界限时, 关键在于计算 $\mathbf{A}_{rs}^0$, 为此需要进一步给出具体微结构的分布形式. 在讨论之前, 我们将介绍有关 $\mathbf{I}^0$ 的一些性质.

(1) 有关 $\mathbf{I}^0$ 的一些积分性质

这里我们将列出 $\mathbf{I}^0$ 的一些积分性质, 不给出证明, 读者可参见有关文献 [47, 50, 51]. 对于任意含原点的封闭域 V_1 , 定义其扩展域 $V_\lambda, \forall \underline{x} \in V_\lambda \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \underline{x} \in V_1, \lambda > 0$, 有

$$\int_{V_\lambda} \mathbf{I}^0(\underline{x}) d\underline{v} = \int_{V_1} \mathbf{I}^0(\underline{x}) d\underline{v} = \mathbf{E}_{V_1}^0 \quad (4.13)$$

即 $\mathbf{E}_{V_1}^0$ 只与 V_1 的形状和取向有关, 而与其扩展域无关. 将 V_1 取为椭球域, 定义为 $|\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{x}| \leq 1$, $\underline{\underline{A}}$ 为任意对称正定矩阵, 对于任意 $\lambda \leq \lambda'$ 有

$$\int_{\lambda \leq |\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{x}| \leq \lambda'} \mathbf{I}^0(\underline{x}) d\underline{v} = 0 \quad (4.14)$$

通过变量代换 $\underline{u} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{x}$, 将椭球域变成球域, 上式变为

$$\int_{\lambda \leq |\underline{u}| \leq \lambda'} \mathbf{I}^0(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{u}) d\underline{v} = 0 \quad (4.15)$$

对于任意一个含原点的球域 S , 其边界为 ∂S , 令 $\lambda' \rightarrow \lambda$ 有

$$\int_{\partial S} \mathbf{I}^0(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}) d\underline{s} = 0 \quad (4.16)$$

(2) 各向同性分布

各向同性分布意味着二阶关联函数具有如下形式 $\varphi_{rs}(\underline{x}) = \varphi_{rs}(|\underline{x}|)$, 即关联函数只与夹杂距离有关. 这样取含原点的一个小球域 V_ε , 把 $\mathbf{I}^0$ 分解成规则和奇异两部分 [51, 52], 利用式 (4.16), 并设域 Ω 为球形, 这样可得

$$\mathbf{A}_{rs}^0 = \int_{\Omega} \mathbf{I}^0(\underline{x}) \varphi_{rs}(|\underline{x}|) d\underline{v} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus V_\varepsilon} \mathbf{I}^0(\underline{x}) \varphi_{rs}(|\underline{x}|) d\underline{v} + \mathbf{E}^0 \varphi_{rs}(0) = \mathbf{E}^0 \varphi_{rs}(0) = \mathbf{E}^0 c_r \delta_{rs} \quad (4.17)$$

其中 $\underline{E}^0 = \int_S \underline{I}^0 dv = \underline{S}^0 : \underline{M}_0$, $\underline{S}^0$ 是参考介质中球形夹杂的 Eshelby 张量.

将 $\underline{A}_{rs}^0$ 代入式 (4.12), 可确定 $\underline{\eta}_r$ 与参考应变 $\underline{E}^0$ 的关系. 为建立复合材料应变与参考应变的关系, 对式 (4.9) 在代表单元内求平均, 考虑到 $\underline{I}^0$ 的性质, 并取代表单元为一单位椭圆域 Ω , 得

$$\underline{E} = \underline{E}^0 - \underline{E}_\Omega^0 : \sum_r c_r (\underline{l}_r - \underline{L}_0) : \underline{\eta}_r \quad (4.18)$$

令 Ω 为一球域, 再利用式 (4.16), 有 $\underline{E}_\Omega^0 = \underline{E}^0$.

将式 (4.17) 代入式 (4.12), 再结合式 (4.18) 有 $\underline{E} = c_r \underline{\eta}_r$, 可以看出 $\underline{\eta}_r$ 相当于 r 相夹杂中的平均应变. 利用 $\underline{\Sigma} = c_r \underline{l}_r : \underline{\eta}_r$, 最后复合材料的有效刚度 HS 界限的表达式为

$$\underline{L}_{HS}^0 = \left\{ \sum_r c_r \underline{l}_r : [\underline{I} + \underline{E}^0 : (\underline{l}_r - \underline{L}_0)]^{-1} \right\} \left\{ \sum_r c_r : [\underline{I} + \underline{E}^0 : (\underline{l}_r - \underline{L}_0)]^{-1} \right\}^{-1} \quad (4.19)$$

$\underline{L}_{HS}^0$ 的上限或下限性质是通过参考介质 $\underline{L}_0$, 按式 (4.8) 的选取确定.

(3) 椭圆型分布

Willis^[53] 将 HS 变分方法应用于微结构呈椭圆型分布情况, 这时关联函数具有如下形式 $\varphi_{rs}(\underline{x}) = \varphi_{rs}(|\underline{A}^{-1} \cdot \underline{x}|)$. 仿照各向同性分布情况, 定义椭圆域 V_1 为 $|\underline{A}^{-1} \cdot \underline{x}| \leq 1$, 并取积分域 Ω 是 V_1 的扩展域. 把 $\underline{I}^0$ 分解成规则 and 奇异两部分, 利用式 (4.16) 得

$$\underline{A}_{rs}^0 = \underline{E}_{V_1}^0 c_r \delta_{rs} \quad (4.20)$$

其中 $\underline{E}_{V_1}^0 = \int_{V_1} \underline{I}^0 dv = \underline{S}_{V_1}^0 : \underline{M}_0$, $\underline{S}_{V_1}^0$ 是参考介质中椭圆域 V_1 的 Eshelby 张量. 最后取代表单元为椭圆域 V_1 的一个扩展域, 利用式 (4.13) 有 $\underline{E}_\Omega^0 = \underline{E}_{V_1}^0$, 这样由 HS 变分方法得到的有效刚度界限可表示成

$$\underline{L}_{HS}^0 = \left\{ \sum_r c_r \underline{l}_r : [\underline{I} + \underline{E}_{V_1}^0 : (\underline{l}_r - \underline{L}_0)]^{-1} \right\} \left\{ \sum_r c_r : [\underline{I} + \underline{E}_{V_1}^0 : (\underline{l}_r - \underline{L}_0)]^{-1} \right\}^{-1} \quad (4.21)$$

同样 $\underline{L}_{HS}^0$ 的上限或下限性质是通过参考介质 $\underline{L}_0$ 按式 (4.8) 的选取确定. 式 (4.21) 可以通过分布状况域 V_1 的选取, 来考虑复合材料宏观各向异性情况, 如纤维增强型复合材料.

(4) 基体夹杂型复合材料, 夹杂呈椭圆型分布

Ponte Castaneda 和 Willis^[54] 针对颗粒复合材料, 夹杂呈椭圆型分布情况, 给出了基于 HS 变分法的复合材料有效刚度 (柔度) 的界限. 假设第 r 类第 i 个夹杂的中心为 $\underline{x}_r^i$, 它是个随机函数. 代表单元内夹杂的位置可通过随机函数 $\zeta^r(\underline{x}) = \sum_i^{N_r} \delta(\underline{x} - \underline{x}_r^i)$ 来描述, N_r 是第 r 类夹杂的个数. 这样所有的力学场都通过 $\zeta^r(\underline{x})$ 变为一个随机场, 用 $\underline{I}_r$ 表示第 r 类夹杂的几何特征域, 这样 r 类夹杂的特征函数可以表示为 $k_r(\underline{x}) = \int_{\underline{I}_r} \zeta^r(\underline{x} - \underline{x}') dv'$, $k_r(\underline{x}) k_s(\underline{x} + \underline{z}) = \int_{\underline{I}_r} \int_{\underline{I}_s} \zeta^r(\underline{x} - \underline{x}') \zeta^s(\underline{x} + \underline{z} - \underline{x}'') dv' dv''$.

利用统计均匀性假设有

$$\varphi_{rs} = \langle k_r(\underline{x}) k_s(\underline{x} + \underline{z}) \rangle = \langle k_r(\underline{x}) k_s(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha = \int_{\underline{I}_r} \int_{\underline{I}_s} \langle \zeta^r(\underline{x} - \underline{x}') \zeta^s(\underline{x} + \underline{z} - \underline{x}'') \rangle_\alpha dv' dv''$$

脚标 α 对样本空间平均. 根据文献 [54] 有 $\langle \zeta^r(\underline{x}) \zeta^s(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha = \delta_{rs} p_r \delta(\underline{z}) + p_{rs}(\underline{z})$. p_r 是在 $\underline{x}$ 点夹杂 r 的几率, p_{rs} 是指在 $\underline{x}$ 点有夹杂 r 在 $\underline{x} + \underline{z}$ 点有夹杂 s 的几率 ($\underline{z} \neq 0$). 这样

$$\varphi_{rs} = \int_{I_r} \int_{I_s} [\delta_{rs} p_r \delta(\underline{z} + \underline{x}' - \underline{x}'') + p_{rs}(\underline{z} + \underline{x}' - \underline{x}'')] dv' dv'' \quad (4.22)$$

将该式代入 A_{rs}^0 的表达式得

$$\begin{aligned} A_{rs}^0 = & \int_{\Omega} \left[\int_{I_r} \int_{I_s} [\delta_{rs} p_r \delta(\underline{z} + \underline{x}' - \underline{x}'') + p_{rs}(\underline{z} + \underline{x}' - \underline{x}'')] dv' dv'' \right] \mathbf{I}^0(\underline{z}) dv = \\ & \delta_{rs} p_r \int_{I_r} \int_{I_s} \mathbf{I}^0(\underline{x}' - \underline{x}'') dv' dv'' + \int_{I_r} \int_{I_s} \int_{\Omega} p_{rs}(\underline{z}) \mathbf{I}^0(\underline{z} - (\underline{x}' - \underline{x}'')) dv dv' dv'' \end{aligned} \quad (4.23)$$

进一步假设夹杂为椭球型, 根据 Eshelby 结果 [55] 有 $\int_{I_r} \int_{I_s} \mathbf{I}^0(\underline{x}' - \underline{x}'') dv' dv'' = V_{I_r} \mathbf{E}_{I_r}^0$, V_{I_r} 为第 r 类夹杂的特征体积, $\mathbf{E}_{I_r}^0$ 与第 r 类夹杂的 Eshelby 张量的关系为 $\mathbf{E}_{I_r}^0 = \mathbf{S}_r^0 : \mathbf{M}_0$. 在计算式 (4.23) 时需要给出 p_{rs} 的具体形式, 文献 [54] 假设夹杂分布为如下广义椭球型分布 $p_{rs} = p_{rs}(|\underline{A}_{rs}^{-1} : \underline{z}|)$. 这样每一对夹杂定义一分布椭球 $\Omega_{rs} = \{\underline{x} : |\underline{A}_{rs}^{-1} : \underline{x}|^2 < 1\}$, 在这个椭球内不会有其他夹杂即 $p_{rs} = 0$. 根据定义有 $p_{rs}(\underline{x}, \underline{x}') = p_{sr}(\underline{x}', \underline{x})$, 统计均匀性要求 $p_{rs}(\underline{z}) = p_{sr}(-\underline{z})$, $\underline{z} = \underline{x}' - \underline{x}$, 因此有 $\underline{A}_{rs} = \underline{A}_{sr}$, $\Omega_{rs} = \Omega_{sr}$.

将式 (4.23) 第二项的积分域 Ω 分成三部分: Ω_{rs} , $\omega_{rs}^L \setminus \Omega_{rs}$ 和 $\Omega \setminus \omega_{rs}^L$, ω_{rs}^L 是 Ω 中最大的 Ω_{rs} 扩展域. 根据文献 [54], $\forall \underline{x}' \in I_r, \forall \underline{x}'' \in I_s$, 有 $\underline{x}' - \underline{x}'' \in \Omega_{rs} \subset \omega_{rs}^L$. 由于在 Ω_{rs} 内 $p_{rs} = 0$, 因此式 (4.23) 的第二项在该域积分为零; 利用关系 (4.15), 可知式 (4.23) 的第二项在 $\omega_{rs}^L \setminus \Omega_{rs}$ 的积分也为零; 在域 $\Omega \setminus \omega_{rs}^L$ 中认为没有长程关联性 $p_{rs} = p_r p_s$, 因此式 (4.23) 的第二项在该域积分为 $p_r p_s V_{I_r} V_{I_s} (\mathbf{E}_{\Omega}^0 - \mathbf{E}_{\Omega_{rs}}^0)$. 由于 $c_s = p_s V_{I_s}$, 最终

$$A_{rs}^0 = c_r \delta_{rs} \mathbf{E}_{I_r}^0 + c_r c_s (\mathbf{E}_{\Omega}^0 - \mathbf{E}_{\Omega_{rs}}^0) \quad (4.24)$$

将该式代入式 (4.12), 并考虑到式 (4.18), 令 $r = 0$ 为基体 ($\eta_0 = 0$), 其刚度张量为 L_0 , 得到

$$\underline{\underline{\eta}}_r + \mathbf{E}_{I_r}^0 : (\underline{l}_r - L_0) : \underline{\underline{\eta}}_r - \sum_{s=1}^n c_s \mathbf{E}_{\Omega_{rs}}^0 : (\underline{l}_s - L_0) : \underline{\underline{\eta}}_s = \underline{\underline{E}}, \quad r = 1 - n \quad (4.25)$$

对于上述讨论的一般情况, 不同的夹杂对确定一分布椭球, 并要求 $\Omega_{rs} = \Omega_{sr}$, 实际上能否实现这种一般夹杂分布, 目前仍不清楚. 如考虑简单的椭球分布情形, 即 $\Omega_{rs} = \Omega$, 这样有 $\mathbf{E}_{\Omega_{rs}}^0 = \mathbf{E}_{\Omega}^0$, 这种分布形式所对应的微结构分布情况将在第 5 节给出. 这样根据 HS 变分方法得到的复合材料有效刚度的界限为

$$L_{HS} = L_0 + \left[I - \sum_{r=1}^n c_r T_r \mathbf{E}_{\Omega}^0 \right]^{-1} \left[\sum_{r=1}^n c_r T_r \right] \quad (4.26)$$

其中 $T_r = [\mathbf{E}_{I_r}^0 + (\underline{l}_r - L_0)^{-1}]^{-1}$, L_{HS} 的上限或下限性质是通过基体 L_0 性质按式 (4.8) 选取确定. 可以证明对于单向夹杂, 夹杂具有相同的形状, 并且分布椭球与夹杂具有相同的形状与取向, L_{HS} 与 (3) 节当参考介质取为基体时一致. 因此 Ponte Castaneda 和 Willis 的方法是对 Willis 工作的推广, 该方法将夹杂形状与分布的影响成功地分开.

(5) 关于 HS 界限的讨论

HS 变分方法通过引入参考介质, 成功解决了通过势能和余能构造静定和协调场所遇到的问题. 从 HS 泛函的定义可以看出, HS 变分原理的条件较传统能量变分原理要强, 这样自然会提出如下问题: 通过 HS 变分原理得到的界限是否是最优的, 换句话说, 是否存在这样的微结构分

布来实现 HS 的界限？对于各向同性材料，Hashin^[56] 通过涂层球型夹杂实现了体积模量的界限，但这样的结构只是近似地实现了剪切模量的界限。Francfort^[57], Milton^[58], Norris^[59] 通过多层次的层状结构同时精确地实现了体积和剪切模量，因此在没有其它额外的信息时，HS 界限是最优的，想进一步改善界限需要给出更多的微结构信息。相对势能或余能泛函而言，HS 上下界限分析只包含了微结构的二阶关联信息，要想引入微结构的三阶关联信息，需要直接从势能或余能泛函入手。

4.1.4 构型相关界限

Stolz 和 Zaoui^[60], Bornert 等^[61] 通过考察 Voigt, Reuss 和 HS 界限及 Hashin 球模型及所对应的 Hashin 界限^[56,52]，认为 Hashin 球模型具有更深刻的物理含义。他们认为从构型的角度讲，Hashin 球模型通过一个非均质构型（球型夹杂和基体涂层）推广了由均质材料夹杂的“点”构型。上述概念的推广可由以下示意图来描述^[52]，为方便起见，下面只考虑由两相各向同性材料构成的各向同性复合材料，夹杂为球型。令复合材料的等效剪切模量为 μ_c ，夹杂和基体的剪切模量分别为 μ_2 和 μ_1 ($\mu_2 \geq \mu_1$)。将描述上述两相材料的构型放置于一剪切模量为 μ_0 的参考介质中，来建立局部化关系，进而得到对复合材料有效剪切模量的估计。让 μ_0 从 0 到无穷大变化，来考察复合材料有效剪切模量的变化。

在图 4(a) 中当参考介质的剪切模量取为零和无穷大时，这样点构型的应力应变分别与外加载荷一致，这时复合材料的有效剪切模量分别对应着 Reuss 和 Voigt 界限 μ_R, μ_V 。当参考介质剪切模量与基体一致时 $\mu_0 = \mu_1$ ，此时对应着由式 (4.19) 给出的 HS 下限 μ_{HS}^- ；当参考介质剪切模量与夹杂一致时 $\mu_0 = \mu_2$ 对应着 HS 上限 μ_{HS}^+ 。曲线 $\mu_c(\mu_0)$ 与二分线的交点对应着自洽估计（将在随后介绍）。图 4(b) 是关于图 4(a) 点构型的 Hashin 球构型推广，其基本特征是构型中材料是非均匀的。 $\bar{\mu}_R, \bar{\mu}_V$ 是对应该构型中广义的 Reuss 和 Voigt 界限，即对应着参考介质的剪切模量取为零和无穷大，这样施加在 Hashin 球构型边界的应力和应变分别与外载应力和应变一致，但在构型内由于材料的非均匀性导致应力和应变也是非均匀的。根据文献 [52]，广义 Reuss 下限对应着 Hashin 下限 $\bar{\mu}_R = \mu_{HS}^-$ ，广义 Voigt 上限对应着 Hashin 上限 $\bar{\mu}_V = \mu_{HS}^+$ 。当参考介质剪切模量与基体一致时 $\mu_0 = \mu_1$ ，对应着 Hashin 球构型的下限 μ_{HA}^- ，此时 Hashin 球构型的下限与 HS 下限一致 $\mu_{HA}^- = \mu_{HS}^-$ ；当参考介质剪切模量与夹杂一致时 $\mu_0 = \mu_2$ ，对应着 Hashin 球构型

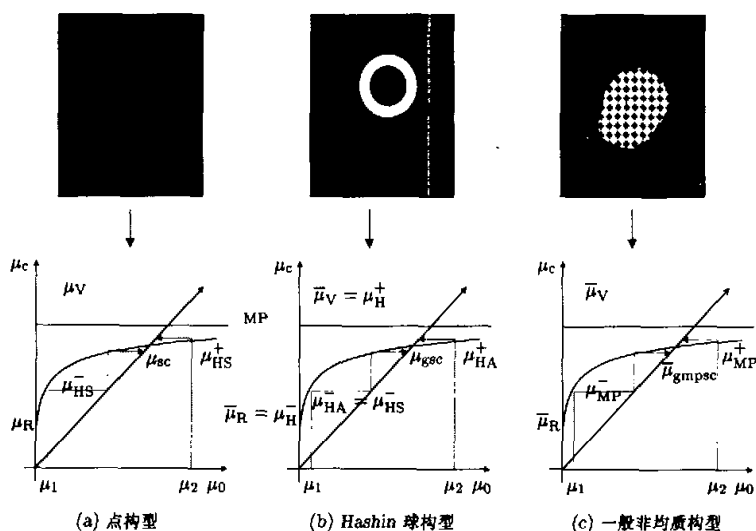


图 4 由点构型到一般非均质构型的概念推广示意图

的上限 μ_{HA}^+ , 曲线 $\mu_c(\mu_0)$ 与二分线的交点对应着广义自洽估计 (将在随后介绍). 按照上述思路, Stolz 和 Zaoui^[60], Bornert 等^[61] 给出了分析一般构型 (图 4(c)) 时所对应的广义 Reuss ($\bar{\mu}_R$) 和 Voigt ($\bar{\mu}_V$) 界限, HS (μ_{MP}^-, μ_{MP}^+) 界限及广义构型自洽方法 ($\bar{\mu}_{gmpsc}$). Herve 等^[62], Dai 等^[63] 讨论了将两个同心球构型放置一参考介质中, 基于上述广义构型的 Reuss 和 Voigt 界限. 显然前面所讨论的界限是广义构型界限的特例, 由于篇幅所限, 本文将不再讨论, 有兴趣可参见上述文献.

4.1.5 含三阶关联信息界限

Beran 和 Molyneux^[64] 利用最小势能和余能原理给出了由各向同性材料构成的各向同性复合材料的体积模量所遵守的上下界限, MaCoy^[65] 给出了上述复合材料的剪切模量的界限. 他们所采用的方法是将最小势能和余能原理应用于代表单元, 通过选择适当的静定许可应力场或协调的应变场得到的. 在他们给出的界限中含有与微结构分布有关的三阶关联函数, 因此所给出的界限与微结构分布形式有关. Milton^[66] 利用相同的微结构分布信息改进了 MaCoy 给出的关于复合材料剪切模量的界限. 上述界限的表达形式通过 Milton^[66], Gibiansky 和 Torquato^[67] 的工作得到了极大的简化, 下面我们将给出两相材料构成的复合材料体积和剪切模量所满足的 Beran 和 Molyneux 体积模量界限及通过 Milton 改进的剪切模量界限, 它们可表示为^[68]

$$k_{BM}^L \leq k_c \leq k_{BM}^U, \quad \mu_{MP}^L \leq \mu_c \leq \mu_{MP}^U \quad (4.27)$$

其中对于二维纤维型面内各向同性复合材料, 上述 k 应为面积模量 $\kappa = k + \mu/3$, 此时

$$\kappa_{BM}^L = \left[\langle 1/\kappa \rangle - \frac{c_1 c_2 (1/\kappa_2 - 1/\kappa_1)^2}{\langle 1/\tilde{\kappa} \rangle + \langle 1/\mu \rangle_\zeta} \right]^{-1}, \quad \kappa_{BM}^U = \left[\langle \kappa \rangle - \frac{c_1 c_2 (\kappa_2 - \kappa_1)^2}{\langle \tilde{\kappa} \rangle + \langle \mu \rangle_\zeta} \right]$$

$$\mu_{MP}^L = \left[\langle 1/\mu \rangle - \frac{c_1 c_2 (1/\mu_2 - 1/\mu_1)^2}{\langle 1/\tilde{\mu} \rangle + \Xi_E} \right]^{-1}, \quad \mu_{MP}^U = \left[\langle \mu \rangle - \frac{c_1 c_2 (\mu_2 - \mu_1)^2}{\langle \tilde{\mu} \rangle + \Theta_2} \right]$$

其中

$$\Theta_2 = \frac{[2\langle \kappa \rangle_\zeta \langle \mu \rangle^2 + \langle \kappa \rangle^2 \langle \mu \rangle_\eta]}{\langle \kappa + 2\mu \rangle^2}, \quad \Xi_2 = 2\langle 1/\kappa \rangle_\zeta + \langle 1/\mu \rangle_\eta$$

对于三维复合材料

$$k_{BM}^L = \left[\langle 1/k \rangle - \frac{4c_1 c_2 (1/k_2 - 1/k_1)^2}{4\langle 1/\tilde{k} \rangle + 3\langle 1/\mu \rangle_\zeta} \right]^{-1}, \quad k_{BM}^U = \left[\langle k \rangle - \frac{3c_1 c_2 (k_2 - k_1)^2}{3\langle \tilde{k} \rangle + 4\langle \mu \rangle_\zeta} \right]$$

$$\mu_{MP}^L = \left[\langle 1/\mu \rangle - \frac{c_1 c_2 (1/\mu_2 - 1/\mu_1)^2}{\langle 1/\tilde{\mu} \rangle + 6\Xi_3} \right]^{-1}, \quad \mu_{MP}^U = \left[\langle \mu \rangle - \frac{6c_1 c_2 (\mu_2 - \mu_1)^2}{6\langle \tilde{\mu} \rangle + \Theta_3} \right]$$

其中

$$\Xi_3 = \frac{[10\langle k \rangle^2 \langle 1/k \rangle_\zeta + 5\langle \mu \rangle \langle 3\mu + 2k \rangle \langle 1/\mu \rangle_\zeta + \langle 3k + \mu \rangle^2 \langle 1/\mu \rangle_\eta]}{(9k + 8\mu)^2}$$

$$\Theta_3 = \frac{[10\langle \mu \rangle^2 \langle k \rangle_\zeta + 5\langle \mu \rangle \langle 3\mu + 2k \rangle \langle \mu \rangle_\zeta + \langle 3k + \mu \rangle^2 \langle \mu \rangle_\eta]}{(k + 2\mu)^2}$$

在上述表达式中有

$$\langle a \rangle = c_1 a_1 + c_2 a_2, \quad \langle a \rangle_\zeta = c_1 a_1 + c_2 a_2, \quad \langle a \rangle_\eta = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2,$$

$$\langle \tilde{a} \rangle = c_2 a_1 + c_1 a_2, \quad \langle 1/\tilde{a} \rangle = c_2/a_1 + c_1/a_2$$

其中与微结构分布参数有关的参数定义为：对于二维纤维型面内各向同性复合材料

$$\varsigma_1 = 1 - \varsigma_2 = \frac{4}{\pi c_1 c_2} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_0^\pi d\theta \cos(2\theta) \left[s_3^1(r, s, t) - \frac{s_2^1(r) s_2^1(s)}{c_1} \right]$$

$$\eta_1 = 1 - \eta_2 = \frac{16}{\pi c_1 c_2} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_0^\pi d\theta \cos(4\theta) \left[s_3^1(r, s, t) - \frac{s_2^1(r) s_2^1(s)}{c_1} \right]$$

对于三维复合材料

$$\varsigma_1 = 1 - \varsigma_2 = \frac{9}{2c_1 c_2} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_{-1}^1 \frac{ds}{s} \int_0^\pi d(\cos \theta) P_2(\cos \theta) \left[s_3^1(r, s, t) - \frac{s_2^1(r) s_2^1(s)}{c_1} \right]$$

$$\eta_1 = 1 - \eta_2 = \frac{5\varsigma_1}{21} + \frac{150}{7c_1 c_2} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_4(\cos \theta) \left[s_3^1(r, s, t) - \frac{s_2^1(r) s_2^1(s)}{c_1} \right]$$

$s_n^i(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ 是同时在 n 点 $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ 出现材料 i 的几率，由于所研究的介质具有统计均匀性， s_n^i 有可写成点间距离的函数。 P_2, P_4 分别是 2 阶和 4 阶 Legendre 函数。

上述界限中与微结构有关的参数对于具体的分布结构可以表示成各相材料体积百分比的函数，有关具体形式和列表可参见 Torquato 的综述^[68]。上述界限及 HS 界限可以通过所谓的 Y 变换 (Y -transformation) 变成简单的形式，具体参见文献 [67, 69, 70]。

4.2 有关界限的讨论

由于复合材料的有效力学量与复合材料的其他有效量（热膨胀系数，热传导系数，介电常数）相互关联^[66, 71, 72]，利用这种关联关系可以通过对一种有效性质进行测量而推算得到其它的有效性质，同样可用一种有效性质的界限来研究另外一种有效性质的界限，有关讨论可参见文献 [66, 71~73]。对于不具备代表性的单元及代表单元边界上受混合均匀边界条件，Huet^[10]，Hazanov 和 Huet^[74] 给出了相应表征有效性质所满足的界限。

最近发展起来一种平移方法 (translation method)^[75, 76] 可以用来对界限进行改善，其基本思路是在代表单元受均匀应力或应变条件时 (Hill 条件)，使局部柔度或刚度产生一个常量平移，即 $\underline{m}(\underline{x}) - \underline{T}$ (只讨论柔度情况，刚度类似)，从而得到一个与原问题具有相同微结构的非均质参考介质 $\underline{m}^*(\underline{x}) = \underline{m}(\underline{x}) - \underline{T}$ 。平移张量满足 (1) 保证 $\underline{m}^*(\underline{x}) = \underline{m}(\underline{x}) - \underline{T}$ 半正定；(2) 对于 $\forall \underline{\sigma} \in C_E$ ，有 $\langle \underline{\sigma} : \underline{T} : \underline{\sigma} \rangle \geq \langle \underline{\sigma} \rangle : \underline{T} : \langle \underline{\sigma} \rangle$ 。这样针对局部柔度平移后的非均质参考介质，利用有效柔度张量的定义有

$$\langle \underline{\sigma}^* \rangle : \underline{M}^* : \langle \underline{\sigma}^* \rangle = \inf_{\underline{\sigma}^* \in C_E} \langle \underline{\sigma}^* : (\underline{m}(\underline{x}) - \underline{T}) : \underline{\sigma}^* \rangle =$$

$$\inf_{\underline{\sigma}^* \in C_E} \langle \underline{\sigma}^* : \underline{m}(\underline{x}) : \underline{\sigma}^* \rangle - \inf_{\underline{\sigma}^* \in C_E} \langle \underline{\sigma}^* : \underline{T} : \underline{\sigma}^* \rangle$$

显然若 $\langle \underline{\sigma} : \underline{T} : \underline{\sigma} \rangle = \langle \underline{\sigma} \rangle : \underline{T} : \langle \underline{\sigma} \rangle$ ，上式意味着复合材料有如下平移关系 $\underline{M}^* = \underline{M} - \underline{T}$ ，我们在第 3 节中给出了平面复合材料的平移张量的一种具体形式。在一般情况下有

$$\underline{M}^* \leq \underline{M} - \underline{T} \text{ 或 } \underline{M} \geq \underline{M}^* + \underline{T}$$

这样我们前面讨论的界限方法可以用于非均质参考介质，然后再对平移张量进行优化，在一般情况下可改善原非均质材料的界限。

最后应提的是 Torquato^[77, 78] 通过引入一孔洞应变场，将非均质材料的有效性质（模量或柔度）展成一精确的级数形式，选取第一项时对应 HS 界限，选取第二项时对应着前面讨论的三阶关联界限。

5 细观力学的近似方法

在第 3.4 节, 我们分别介绍了分析复合材料有效性质所满足的一些普适关系和在有限信息条件下, 分析有效性质所应满足的界限的方法. 本节将重点介绍在有限信息条件下, 几种估计有效性质的近似方法. 一般在建立近似的估计方法时有三个共同的步骤^[79,80]: (1) 复合材料微结构的实验表征和相材料性质的确定; (2) 建立局部化关系; (3) 均质化. 局部化关系是细观力学近似方法的核心, 其目的是建立复合材料代表单元在均匀边界条件下, 代表单元内部各点的应力和应变与所施加宏观外载的关系, 即

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\Sigma}}, \text{ 或 } \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{E}} \quad (5.1)$$

$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}}), \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{x}})$ 分别称为应力集中和应变局部化张量. 绝大多数细观力学近似方法在该步骤中, 通过一些假设将多个夹杂 (或构型, 见第 4.1.4) 问题转换为单个夹杂 (或构型) 问题. 均质化过程是通过建立复合材料代表单元中平均应力和平均应变的关系, 给出复合材料有效性质. 复合材料的有效刚度和柔度可分别通过如下步骤得到

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \rangle = \langle \underline{\underline{l}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \langle \underline{\underline{l}} : \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{x}}) \rangle : \underline{\underline{E}} \Rightarrow \underline{\underline{L}} = \langle \underline{\underline{l}} : \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{x}}) \rangle \quad (5.2)$$

或

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}) \rangle = \langle \underline{\underline{m}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \langle \underline{\underline{m}} : \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}}) \rangle : \underline{\underline{\Sigma}} \Rightarrow \underline{\underline{M}} = \langle \underline{\underline{m}} : \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}}) \rangle \quad (5.3)$$

可见在计算 $\underline{\underline{L}}, \underline{\underline{M}}$ 时, 关键是计算局部化关系中的 $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}}), \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{x}})$. 由于有 $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle, \underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle$, 利用式 (5.1) 可得 $\langle \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}}) \rangle = \underline{\underline{I}}, \langle \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{x}}) \rangle = \underline{\underline{I}}$. 上述关系说明在求局部化关系时, 如有 n 相材料, 只需求出 $n-1$ 个局部化关系即可.

5.1 基于点构型的近似方法

5.1.1 点构型的单夹杂问题 (Eshelby 理论)

复合材料细观力学的近似方法在建立局部化关系时, 往往将多夹杂问题转换为单夹杂问题处理, 因此单夹杂问题的解是许多细观力学模型的基础. 下面考察一无限大基体 L_0 中具有非均质夹杂 Ω , 其模量分布用 $\underline{\underline{l}}(\underline{\underline{x}})$ 表示, 同时在夹杂内有本征应变 $\underline{\underline{\varepsilon}}^h(\underline{\underline{x}})$, 在基体边界上受 $\underline{\underline{E}}^0$ 作用. 利用平衡方程并引入无限大基体 (刚度张量为 L_0) 的 Green 函数, 介质中任何一点的应变可以表示为^[49]

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{E}}^0 - \int_{\Omega} \underline{\underline{\Gamma}}^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{x}}') : [(\underline{\underline{l}}(\underline{\underline{x}}) - L_0) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}') - L_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^h(\underline{\underline{x}}')] dv' \quad (5.4)$$

下面考察在无限大基体 L_0 的一椭球域 Ω 施加常数本征应变 $\underline{\underline{\varepsilon}}^h$ 的情形, 这时

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}) = \left(\int_{\Omega} \underline{\underline{\Gamma}}^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{x}}') : L_0 dv' \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}^h \quad (5.5)$$

Eshelby^[55] 证明了在椭球域内部各点 $\underline{\underline{x}} \in \Omega$, 应变是一常数, 即 $S_{\Omega}^0 = \int_{\Omega} \underline{\underline{\Gamma}}^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{x}}') : L_0 dv'$ 是一常数. S_{Ω}^0 称为 Eshelby 张量, 它与椭球域 Ω 的形状和基体的性能有关, 与 Ω 的大小无关. 对于各向同性基体, Eshelby 张量具有解析的表达式, 具体见文献 [81]. 椭球域 Ω 外的应变与位置有关, 有关讨论可参见文献 [82].

下面研究无限大基体 L_0 中有一椭球形夹杂 Ω , 其模量为 $\underline{\underline{l}}_{\Omega}$, 在基体边界上受均匀应力 $\underline{\underline{\Sigma}}$ 或应变 $\underline{\underline{E}}$ ($\underline{\underline{\Sigma}} = L_0 : \underline{\underline{E}}$) 作用, 如图 5(a) 所示. 设想将图 5(a) 中的非均质域, 经过一相变 (用一

待本征应变 $\underline{\underline{\epsilon}}^h$ 表示) 变成与周围基体相同的材料 (图 5(b)). 图 5(b) 中夹杂内部的应力与应变可通过式 (5.5) 和叠加原理得到

$$\underline{\underline{\sigma}}_\Omega = \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{L}}_0 : (\underline{\underline{S}}_\Omega^0 - \underline{\underline{I}}) : \underline{\underline{\epsilon}}^h, \quad \underline{\underline{\epsilon}}_\Omega = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{S}}_\Omega^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^h$$

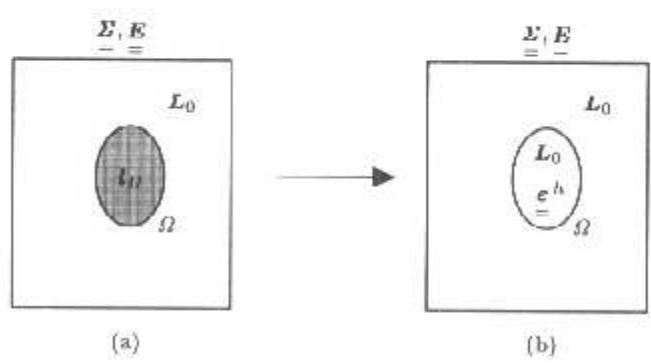


图 5 点构型单夹杂问题

由于椭球域 Ω 内应力 - 应变应满足夹杂材料的本构关系, 即 $\underline{\underline{\sigma}}_\Omega - \underline{\underline{l}}_\Omega : \underline{\underline{\epsilon}}_\Omega$, 将前式代入可确定待本征应变 $\underline{\underline{\epsilon}}^h = [(\underline{\underline{l}}_\Omega - \underline{\underline{L}}_0) : \underline{\underline{S}}_\Omega^0 + \underline{\underline{L}}_0]^{-1} : (\underline{\underline{L}}_0 - \underline{\underline{l}}_\Omega) : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}_\Omega : \underline{\underline{E}}$. 这样原问题非均质椭球域 Ω 的应力与应变和所施加均匀应力或应变的关系为

$$\underline{\underline{\epsilon}}_\Omega = (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}}_\Omega^0 : \underline{\underline{A}}_\Omega) : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{H}}_\Omega^0 : \underline{\underline{E}}, \quad \underline{\underline{\sigma}}_\Omega - \underline{\underline{l}}_\Omega : (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}}_\Omega^0 : \underline{\underline{A}}_\Omega) : \underline{\underline{L}}_0^{-1} : \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{N}}_\Omega^0 : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (5.6)$$

5.1.2 稀疏估计

设复合材料代表单元有许多夹杂, 稀疏估计忽略了夹杂间的相互作用, 它在建立局部化关系时, 将每个夹杂放置于无限大基体中, 并受宏观均匀 $\underline{\underline{\Sigma}}$ 或 $\underline{\underline{E}}$ 作用. 进而利用式 (5.6) 建立每个夹杂内应力应变与外载的关系, 然后再利用均质化关系的复合材料的有效刚度表示成

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}_0 + \sum_\Omega c_\Omega (\underline{\underline{l}}_\Omega - \underline{\underline{L}}_0) : \underline{\underline{H}}_\Omega^0 \quad (5.7)$$

c_Ω 为夹杂 Ω 的体积百分比. 对于颗粒增强的两相复合材料, 分别用 μ_0, κ_0 表示基体的剪切和体积模量, 相应的夹杂和复合材料分别用 μ_1, κ_1 和 μ, κ 表示, c 为颗粒的体积百分比. 在这种情况下, 式 (5.7) 又可表示为

$$\kappa/\kappa_0 = 1 + \frac{c(\kappa_1/\kappa_0 - 1)}{1 + (\gamma_\kappa - c)(\kappa_1/\kappa_0 - 1)}, \quad \mu/\mu_0 = 1 + \frac{c(\mu_1/\mu_0 - 1)}{1 + (\gamma_\mu - c)(\mu_1/\mu_0 - 1)}$$

其中 $\gamma_\kappa = (1 + \nu_0)/3(1 - \nu_0)$, $\gamma_\mu = (8 - 10\nu_0)/15(1 - \nu_0)$, ν_0 是基体的泊松比.

稀疏估计一般只适用于夹杂的体积百分比比较小的情形, 具体情况取决于夹杂形状和夹杂与基体材料的弹性失配大小等. 对于微裂纹情况, Kachanov 的研究表明由于裂纹间的屏蔽作用, 稀疏情况估计可以用于裂纹含量较高的情形 [83].

5.1.3 Mori-Tanaka 模型 [84]

该模型由于能给出有效性质的显示简单表达式而被广泛应用, 下面采用 Benveniste [85] 对该

方法的解释。设复合材料代表单元有许多夹杂, 在建立局部化关系时, 将每个夹杂放置于无限大基体中, 而夹杂间的相互作用通过作用在基体上一待求的基体平均应变 $\underline{\underline{\varepsilon}}_0$ 来考虑。这样对于每个夹杂, 利用单夹杂问题的解 (式 (5.6)) 得 $\underline{\underline{\varepsilon}}_\Omega = \underline{\underline{H}}_\Omega^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}_0$ 。为了建立待求的基体平均应力 $\underline{\underline{\sigma}}_0$ 与宏观均匀应变 $\underline{\underline{E}}$ 的联系, 再利用关系 $\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = c_0 \underline{\underline{\varepsilon}}_0 + \sum_\Omega c_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}_\Omega$, 最后得 $\underline{\underline{\varepsilon}}_0 = \left[\underline{\underline{I}} + \sum_\Omega c_\Omega (\underline{\underline{H}}_\Omega^0 - \underline{\underline{I}}) \right]^{-1} : \underline{\underline{E}}$, 即得到局部化关系。复合材料的有效刚度可通过均质化关系确定, 即 $\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = c_0 \underline{\underline{\sigma}}_0 + \sum_\Omega c_\Omega \underline{\underline{\sigma}}_\Omega = \left[\underline{\underline{L}}_0 + \sum_\Omega c_\Omega (\underline{\underline{l}}_\Omega - \underline{\underline{L}}_0) : \underline{\underline{H}}_\Omega^0 \right] : \underline{\underline{\varepsilon}}_0$ 。利用 $\underline{\underline{\varepsilon}}_0$ 与 $\underline{\underline{E}}$ 的关系消去 $\underline{\underline{\varepsilon}}_0$, 最后复合材料的有效刚度为

$$\underline{\underline{L}} = \left[\underline{\underline{L}}_0 + \sum_\Omega c_\Omega (\underline{\underline{l}}_\Omega - \underline{\underline{L}}_0) : \underline{\underline{H}}_\Omega^0 \right] : \left[\underline{\underline{I}} + \sum_\Omega c_\Omega (\underline{\underline{H}}_\Omega^0 - \underline{\underline{I}}) \right]^{-1} \quad (5.8)$$

对于颗粒增强的两相复合材料, 由式 (5.8) 得到的复合材料有效体积和剪切模量分别为

$$\kappa/\kappa_0 = 1 + \frac{c(\kappa_1/\kappa_0 - 1)}{1 + \gamma_\kappa(1 - c)(\kappa_1/\kappa_0 - 1)}, \quad \mu/\mu_0 = 1 + \frac{c(\mu_1/\mu_0 - 1)}{1 + \gamma_\mu(1 - c)(\mu_1/\mu_0 - 1)}$$

对于球型夹杂, 取基体为参考介质, 当基体为最软的一相材料时, 利用式 (4.19) 中 $\underline{\underline{E}}^0$ 与 Eshelby 张量的关系, 可证明 Mori-Tanaka 估计对应于 HS 下限 (式 (4.19)), 反之则为 HS 上限^[86]。对于单向排列的椭球型夹杂构成的复合材料, 同样取基体为参考介质, 令式 (4.21) 中刻划夹杂分布的椭球形状和取向与夹杂一致, 并利用 $\underline{\underline{E}}_{V_i}^0$ 与 Eshelby 张量的关系, 可以证明 Mori-Tanaka 估计与 Willis 给出的界限相同^[87]。对于夹杂具有空间取向的复合材料, 令式 (4.25) 中刻划夹杂分布的椭球域形状与取向与所含夹杂的形状与取向一致, 可以证明 Mori-Tanaka 方法与 Ponte Castenada 和 Willis(PCW) 给出的结果一致^[88~90]。但此时这种分布违反了 $\Omega_{rs} = \Omega_{sr}$ 这个对称性要求, 说明在这种情况下, Mori-Tanaka 模型所对应的微结构无法在 PCW 方法给出的微结构中实现。有关微结构分布, 我们将在第 5.3 节中给予详细的讨论。另外 Mori-Tanaka 方法对于带有取向的各向异性夹杂复合材料有效性质的预测会导致预测模量的不对称, 从理论上说明该方法还存在本质上的缺陷^[91,92]。

5.1.4 Kuster-Toksoz 模型

该方法由 Kuster 和 Toksoz (KT) 在 1974 年为研究波在非均质材料中的传播而提出^[93], Berryman 等^[94] 就该方法给出详细的讨论。该方法主要思路是在建立局部化关系时, 将每个夹杂放置于无限大基体中并受参考应变 $\underline{\underline{E}}^0$ 作用, 这样对单夹杂利用式 (5.6) 得每个夹杂的应变与参考应变的关系为 $\underline{\underline{\varepsilon}}_\Omega = \underline{\underline{H}}_\Omega^0 : \underline{\underline{E}}^0$ 。该方法的核心概念在于在建立参考应变 $\underline{\underline{E}}^0$ 与复合材料应变 $\underline{\underline{E}}$ 的关系时, 将一复合材料椭球 V 放置于无限大基体中并受同样参考应变 $\underline{\underline{E}}^0$ 作用。这样利用式 (5.6) 有 $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{H}}_V^0 : \underline{\underline{E}}^0$ (注意与 Mori-Tanaka 方法的不同), 其中 $\underline{\underline{H}}_V^0$ 中含有待求的复合材料模量。取基体为参考介质, 有如下关系

$$(\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}_0) : \underline{\underline{E}} = \sum_\Omega c_\Omega (\underline{\underline{l}}_\Omega - \underline{\underline{L}}_0) : \underline{\underline{\varepsilon}}_\Omega \quad (5.9)$$

利用恒等式 $\underline{\underline{H}}_i^0 = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}}_i^0 : \underline{\underline{A}}_i = (\underline{\underline{L}}_0 - \underline{\underline{l}}_i)^{-1} : \underline{\underline{L}}_0 : \underline{\underline{A}}_i$, 其中 $i = \Omega, V$, 在 $i = V$ 时由于夹杂是复合材料, 因此 $\underline{\underline{l}}_V = \underline{\underline{L}}$, 这样有

$$\underline{\underline{A}}_V = \sum_\Omega c_\Omega \underline{\underline{A}}_\Omega \quad (5.10)$$

将 A_V 的表达式代入上式, 整理后复合材料有效刚度的估计为

$$L = L_0 : \left\{ I - \left[S_V^0 + \left(\sum_{\Omega} c_{\Omega} A_{\Omega} \right)^{-1} \right]^{-1} \right\} \quad (5.11)$$

利用 $T_r = -L_0 : A_{\Omega}$, 及 $E_i^0 = S_i^0 : L_0^{-1}$ ($i = V, I_r$), 可以证明 Ponte Castaneda 和 Willis 给出的 HS 界限与 Kuster 和 Toksoz 模型一致^[88]. 由此得出 KT 方法中, 复合材料椭球的形状与取向实际上与 PCW 方法中刻划椭球型分布的椭球域一致, 因此该方法具有 PCW 方法中可实现的微结构分布. 由于两种方法等价因此有关 MT 与 PCW 方法的联系同样适用于 KT 方法.

5.1.5 自洽方法^[95,96]

自洽方法在建立局部化关系时, 认为在计算每个夹杂的应力或应变时, 可以将夹杂放置于一无限大待求的复合材料 L 中, 其边界受均匀应力或应变 $\underline{\Sigma}, \underline{E}$ 作用. 利用单夹杂问题的解, 并注意此时基体是待求的复合材料, 对于每个夹杂有 $\underline{\varepsilon}_{\Omega} = H_{\Omega} : \underline{E}$, 对于基体由于是线性问题有 $\underline{\varepsilon}_0 = H_0 : \underline{E}$. 因基体是连续相, 其应变局部化张量 H_0 可通过 $\underline{E} = \langle \underline{\varepsilon} \rangle$ 确定, 即 $c_0 H_0 = I - \sum_{\Omega} c_{\Omega} : H_{\Omega}$. 对于单向排列具有相同形状夹杂构成的复合材料, 计算 H_0 的结果表明, 自洽法在计算基体的局部化关系时, 相当于将基体看作与夹杂相具有相同形状的夹杂放置于一无限大待求复合材料中^[88], 因此自洽法没能有效描述基体与夹杂间的形貌差别. 利用均质化关系, 自洽方法对复合材料有效刚度的估计为

$$L = L_0 + \sum_{\Omega} c_{\Omega} (l_{\Omega} - L_0) : H_{\Omega} \quad (5.12)$$

由于 H_{Ω} 中含有待求的复合材料模量 L (Eshelby 张量也与 L 有关), 因此式 (5.12) 实际给出了确定复合材料有效刚度的一个非线性方程.

研究表明对于孔洞材料或刚性夹杂, 基于自洽方法的预测在大于一定的夹杂体积百分比后, 复合材料的刚度为零或无穷大^[52,97], 即孔洞或刚性夹杂会形成连接导致出现渗流现象^[98]. 上述现象进一步表明, 自洽方法无法描述具有连续相这一基本特征的复合材料微结构特点. 最近的研究表明对于具有连续基体的复合材料, 自洽方法违反了相关的界限^[78]. 另一方面, 对多晶材料线性和非线性有效性能的预测, 自洽法是相对简单有效的. 这里强调一点是, 多晶材料没有连续相, 不属于本文主要关心的颗粒复合材料类型. 自洽法可能更适合没有连续相的非均匀材料有效性能的估计.

5.1.6 微分自洽方法^[59]

该方法认为最终的复合材料可由如下想象过程形成: 从基体出发, 取出一小部分基体然后再向基体中均匀加入同体积夹杂, 这样构成一新的复合材料. 然后再在这样一个新的复合材料中取出一小部分再向其中均匀加入同体积夹杂, 不断地重复这个过程直至构成最终的复合材料^[99]. 设想一中间过程复合材料的有效刚度为 $L(c)$, 夹杂的体积百分比为 c . 在此基础上取出体积 δV 后, 再均匀加入相同体积的夹杂, 形成新的复合材料具有总的夹杂体积百分比为 $c + \delta c$, 模量为 $L(c + \delta c)$. 很容易证明将夹杂的体积百分比为 c 的复合材料视为基体, 经过上述取出与添入 δV 时, 新增夹杂所占的体积百分比为 $\delta c / (1 - c)$. 这时 $L(c + \delta c)$ 的计算可以利用前面所给出的方法, 即相当于基体模量为 $L(c)$, 含夹杂的体积百分比为 $\delta c / (1 - c)$. 下面我们将利用自洽方法建立对 $L(c + \delta c)$ 的估计, 这时基体刚度为 $L(c)$, 为简单起见只考虑有一种夹杂情况, 夹杂的体积百分比为 $\delta c / (1 - c)$, 利用式 (5.12) 有

$$L(c + \delta c) - L(c) = \frac{\delta c}{1 - c} (l_1 - L(c)) : H_1$$

最后整理得

$$\frac{dL(c)}{dc} = \frac{1}{1-c}(I_1 - L(c)) : H_1 \quad (5.13)$$

上述微分方程的边界条件为 $L(0) = I_0$, 通过式 (5.13) 能够确定复合材料的有效模量 $L(c)$.

研究表明微分自洽方法能够描述具有一连续相为特征的复合材料有效性能^[52], 另外 Norris 的研究表明对于两相材料, 微分自洽方法估计对应着能够实现的微结构分布形式^[59]. 最后应指出的是对于具有不同夹杂形状或取向的复合材料, 微分方法所得的结果与夹杂添加的顺序有关, 换句话说与实现的路径有关^[83].

5.2 基于三相模型的近似方法

5.2.1 三相模型

在单个夹杂 (第 i 个夹杂) 周围, 直接包围该夹杂的是基体材料; 而在距离该夹杂较远处的复合材料对该夹杂的影响, 根据 St. Venant 原理将实际上是以 L 为模量的均匀材料来实现的. 显然, 采用如图 6 所示模型^[18], 只要区域直径 D 与最大夹杂直径 $d_{\max}$ 比远大于 1, 则该模型可以精确估计第 i 夹杂的应力和应变.

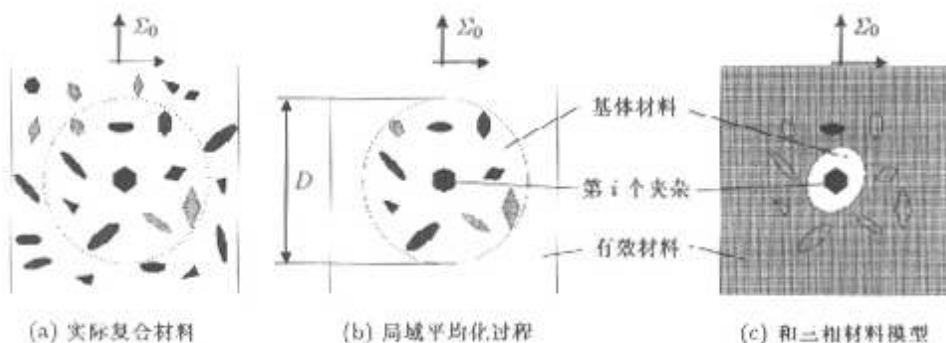


图 6 三相模型

对于两相颗粒复合材料, 当夹杂相比基体相更硬时, 复合材料的有效模量 L 比基体材料的模量 I_0 高, 比夹杂的模量 I_1 低. 然而, 对第 i 夹杂具有最直接影响的是它的周边介质, 即它的周边基体材料. 但是由于 $L > I_0$, 如果将第 i 夹杂置于无限大以 I_0 为弹性张量基体介质中且施加同样的无穷远力边界条件, 则显然将高估该夹杂上的应变, 相应的稀疏法就低估了复合材料的有效模量. 如果将第 i 夹杂置于无限大以 L 为弹性张量基体介质中且施加同样的无穷远力边界条件, 则将低估该夹杂上的应变, 相应的自洽法就高估了复合材料的有效模量. 根据上述讨论, 应该存在包围第 i 夹杂区域 Ω_i 的一个有限基体材料区域 V_i^m , 称作为 Ω_i 的基体氛围, 在 V_i^m 的外部材料为均匀有效材料 (弹性模量张量 L), 受同样的无穷远力边界条件. 在这样的模型所求得第 i 夹杂平均应变或应力精确等于原复合材料第 i 夹杂的平均应变或应力. 这样的模型称作为三相模型. 建立在三相模型基础上的近似方法, 主要有广义自洽法、有效自洽法、IDD 估计、以及更为广义的双夹杂方法. 下面对此分别作一简介.

5.2.2 广义自洽方法

当所有 Ω_i 和 V_i^m 为同心球 (或同心圆柱) 时, 对于各向同性 (或横观各向同性) 问题, 可以针对三相模型获得精确解析解. Christensen 等^[100] 利用这些解析解, 给出了各向同性球形夹杂 (或圆柱形夹杂) 与各向同性基体材料复合而成的各向同性 (或横观各向同性) 复合材料的解析估计, 称作为广义自洽法估计. Christensen^[97] 对大的夹杂密度问题的各种细观力学估计进行了评估, 表明广义自洽法给出了与实验结果 (以及多孔材料的方法估计的结果) 最为一致的估计. 例如, 对于二维各向弹性材料含圆形孔洞的问题, 广义自洽法给出的有效面积模量 K 和有

效剪切模量 μ 与基体材料面积模量 K_0 、剪切模量 μ_0 、泊松比 ν_0 和孔隙率 c 的关系为^[103]

$$(1 - \nu_0) \left(\frac{K_0}{K} - 1 \right) = \frac{2c}{1 - c}$$

$$(1 + \nu_0) \left(\frac{\mu_0}{\mu} - 1 \right) = \frac{c + c^2 + c^3 - 1 + \sqrt{(1 + c + c^2 + c^3)^2 - 12c^2}}{(1 - c)^3/2} \approx \frac{4c}{1 - c} + 12c^3 + O(c^4)$$

对于椭球夹杂复合材料或裂纹体, Huang 等^[102,103] 建议采用椭球性质的 V_i^m . 他们通过构造相应的位移模式, 用数值方法对需要的复合材料和裂纹体的有效弹性进行了估计, 并也称之为广义自洽法估计. Herve 和 Zaoui^[104] 采用多层同心球及圆柱构型推广了 Christensen 的广义自洽分析. 需要指出的是, 上述推广都要求数值求解, 而未能给出解析估计, 因此是效率较高、精度较好的关于复合材料有效模量估计的简化数值分析方法.

5.2.3 有效自洽方法和 IDD 估计

最近, Zheng 和 Du^[105,106] 发展了一种既能利用三相模型所具有的可精确估计夹杂平均应变或平均应力的潜力, 同时又回避了三相模型除同心球或同轴圆柱外没有简单解析解的困难的一种新的有效自洽方法和一种新的具有简单形式和普遍适用性的细观力学估计公式, 称作为 IDD (相互作用直接推导) 估计. 有效自洽法和 IDD 方法与 Mori-Tanaka 方法有一定的相似性, 即三者都可以理解为在无限大基体材料中放置单个夹杂, 通过将远场均匀应力 $\underline{\Sigma}$ 作某种修正以计及夹杂相互作用的影响, 由此求得该夹杂的平均应力或平均应变, 最终实现反映夹杂相互作用. 在 Mori-Tanaka 方法中是将 $\underline{\Sigma}$ 修正为基体材料的平均应力, 对该平均应力给出来一个形式简单的近似, 而在有效自洽法和 IDD 方法中, 则是采用夹杂基体氛围的 Eshelby 张量来修正, 具有与 Mori-Tanaka 方法完全类同的形式简单性. 当所有夹杂的基体范围具有完全相同的外表面形状和定向时, 关于柔度增量 $H = M - M_m$ 的 IDD 估计 H^{IDD} 可由稀疏估计 H^{dilute} 和基体范围形状的 Eshelby 张量 $S_{V_i^m}$ 直接给出如下

$$H^{\text{IDD}} = [(H^{\text{dilute}})^{-1} - S_{V_i^m}]^{-1} = H^{\text{dilute}}(I - S_{V_i^m} : H^{\text{dilute}})^{-1}$$

当基体范围不具同一性时, 一般结果为

$$H^{\text{IDD}} = \left(I - \sum_i H_i^{\text{dilute}} : S_{V_i^m} \right)^{-1} : H^{\text{dilute}} \quad (5.14)$$

其中 $S_{V_i^m}$ 为所有具有第 i 种形状基体范围的 Eshelby 张量, H_i^{dilute} 为材料仅含具有第 i 种形状基体范围的夹杂的柔度张量稀疏解.

如果每个夹杂的基体范围的形状, 与夹杂体积分数一样, 是作为预知的微结构信息, 则 Du 和 Zheng^[107] 证明了 IDD 估计具有体积分数 c 的二阶精度, 即当 $c \rightarrow 0$ 时, IDD 关于有效弹性张量的估计, 其误差为 $O(c^3)$. 他们也发现^[106], 如果所有夹杂及其基体范围为共形共心椭球, 则 IDD 估计与 Mori-Tanaka 估计相同; 如果所有基体范围形状和定向相同, 则 IDD 估计与 Ponte-Castañeda 和 Willis 的估计相同.

IDD 估计不仅具有简单的结构, 所含各量具有明确的几何、物理含义, 且 IDD 估计对任意夹杂形状、任意多相和任意物理许可得体积分数, 都普遍适用. 大量数值模拟结果表明, 对绝大多数问题, IDD 估计也是比较而言最好的估计^[18,105~108].

5.2.4 双夹杂方法

第 4.1.4 节我们讨论了构型的概念, 由于构型的选取是非常复杂并且不是唯一的, 下面我们只讨论如图 7 所示的由两个椭球构成的构型, 将该构型放置于一均质参考介质中. 对于一般的构型解析求解有很大的困难, 往往只能通过数值的方法.

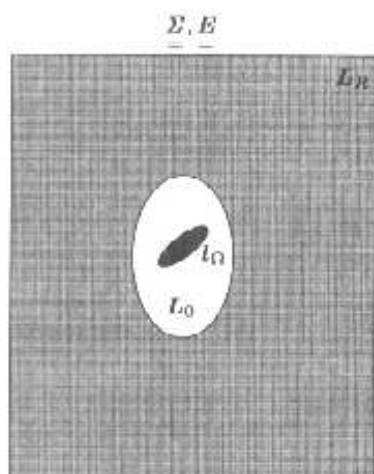


图 7 由两个椭圆域构成的构型

对于上述所要研究的构型, Hori 和 Namat-Nasser^[109,110] 忽略有关两个椭球的相对位置的影响, 近似地给出了上述问题的解析解, 杜丹旭^[89], Zheng 等^[106] 的研究表明 Hori 等的分析实际上是忽略了有关夹杂局部体积百分比 (夹杂椭圆体积与外椭圆胞体积比) 的三阶以上小量, 下面不妨假设能够求出上述问题的解 (至少数值上能够做到), 令基体和夹杂中的应力应变表示为

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_0 &= \underline{Q}_0^R : \underline{\Sigma} \\ \underline{\sigma}_\Omega &= \underline{Q}_\Omega^R : \underline{\Sigma} \\ \underline{\varepsilon}_0 &= \underline{R}_0^R : \underline{E} \\ \underline{\varepsilon}_\Omega &= \underline{R}_\Omega^R : \underline{E}\end{aligned}\quad (5.15)$$

$\underline{Q}_0^R, \underline{Q}_\Omega^R, \underline{R}_0^R, \underline{R}_\Omega^R$ 是基体、夹杂及参考介质的性质, 并与两个椭圆域的形状、相对体积和位置有关。有了式 (5.15) 给出的上述构型的局部化关系, 我们就可仿照前面所讲述均质夹杂构型问题的方法来确定复合材料的有效性质。与均质夹杂情况不同的是对于上述每个夹杂都通过一外椭圆定义 与之相关的基体, 并定义一个局部夹杂体积百分比 c_Ω 。

将与每个夹杂相关的椭圆胞放置于一均匀参考介质 L_R 中, 其边界受参考应力 $\underline{\Sigma}_R$ 或应变 $\underline{E}_R$ ($\underline{\Sigma}_R = L_R : \underline{E}_R$) 作用, 令复合材料应力和应变分别为每个椭圆胞的平均应力和应变之和, 有

$$\underline{\Sigma} = \sum_\Omega [(1 - c_\Omega) \underline{Q}_0^R + c_\Omega \underline{Q}_\Omega^R] : \underline{\Sigma}_R, \quad \underline{E} = \sum_\Omega [(1 - c_\Omega) \underline{R}_0^R + c_\Omega \underline{R}_\Omega^R] : \underline{E}_R \quad (5.16)$$

利用 $\underline{\Sigma}_R = L_R : \underline{E}_R$, 消去上式中的参考应力 $\underline{\Sigma}_R$ 和应变 $\underline{E}_R$, 即可得到与参考介质有关的复合材料刚度估计

$$\underline{L} = \sum_\Omega [(1 - c_\Omega) \underline{Q}_0^R + c_\Omega \underline{Q}_\Omega^R] : L_R : \left[\sum_\Omega [(1 - c_\Omega) \underline{R}_0^R + c_\Omega \underline{R}_\Omega^R] \right]^{-1} \quad (5.17)$$

Hori 和 Namat-Nasser^[109,110] 利用对 $\underline{Q}_0^R, \underline{Q}_\Omega^R, \underline{R}_0^R, \underline{R}_\Omega^R$ 的近似估计, 给出了计算复合材料有效刚度的一种近似方法, 并证明对于夹杂单向排列的两相复合材料, 当所有的椭圆胞形状与所含夹杂一致时, 并且夹杂局部体积百分比即为复合材料的夹杂的体积百分比, 取参考介质为基体时上述方法与 Mori-Tanaka 方法一致, 取参考介质为待求的复合材料时上述结果与自洽结果一致。对于夹杂任意取向的两相复合材料, 并且夹杂局部体积百分比即为复合材料的夹杂体积百分比, Hu 和 Weng^[88] 证明当取参考介质为基体时, 并且与每个夹杂相关的外椭圆胞形状与取向和所含夹杂一致时, 上述双夹杂方法与 Mori-Tanaka 方法一致; 当与每个夹杂相关的外椭圆胞形状与取向固定时, 上述双夹杂方法与 PCW 方法估计一致, 并且 PCW 方法中刻划夹杂分布的椭圆与双夹杂方法的外椭圆一致。Namat-Nasser^[90] 的研究组也把双夹杂法推广到多层夹杂的情形。

可以证明有效自洽方法和 IDD 估计式 (5.14) 与双夹杂法中将参考介质取为基体所得的估计一致, 因此两种方法在这种情况下实际等价。

5.3 有关近似方法的讨论

第 5.1 和 5.2 节对几种典型细观力学近似方法的分析表明, 它们之间及它们与界限理论之间存在着许多联系: 如对于球型夹杂, 基体为最软或最硬相时, Mori-Tanaka 方法与 HS 下限或上限一致; 对于单向排列椭球型夹杂, MT 方法与 Willis 的界限一致; 对于简单椭球分布 PCW 方法与 KT 方法等价, 并且它们都可以由有效自洽方法和 IDD 估计或双夹杂方法通过选取适当外椭球体胞得到^[88,106], 这些联系预示着上述模型之间存在着共同特性. 按 Stolz 和 Zaoui^[60] 提出的构型的概念, 上述方法都是将特定的构型放置在一参考介质中来建立局部化关系. 界限理论表明通过适当选取参考介质 (按式 (4.8)), 可以得到复合材料有效刚度或柔度的界限. 近似方法为了方便一般是设参考介质为基体 (连续相) 或待求的复合材料模量, 或任意一中间介质 (如稀疏夹杂构成的等效介质), 因此近似方法与界限理论的联系取决于基体的性质. 对于双椭球构型, 当把它放置于基体中 (与外椭球所包含的基体一致), 有效自洽方法和 IDD 估计及双夹杂方法在建立局部化关系时的近似性消失^[88], 因此在特定微结构分布情况下, 它们能得出与 PCW 方法一致的估计.

PCW 方法的重要性在于它首次分离了夹杂形状和分布的影响, 对于简单椭球分布情况, 它实际给出了如下分布形式的复合材料有效性质, 即认为复合材料代表单元由单向固定形状的椭球体胞充满, 为充满整个代表单元空间, 椭球的大小必须发生变化 (可想象为 Hashin 球模型在某一方向拉长或缩短). 夹杂在某一方向分布的密与疏是通过分布椭球的形状与取向来控制. 为了保证 $\Omega_{rs} = \Omega_{sr}$, 简单椭球分布假设所有夹杂的分布椭球的形状与取向一致 (图 8). 由于 KT 方法与此时的 PCW 方法等价, 因此 KT 方法所描述的微结构分布形式与 PCW 方法一致, KT 方法中的复合材料椭球实际上相当于 PCW 方法中的分布椭球. 对于 Mori-Tanaka 方法, Hu 和 Weng^[90], 杜丹旭^[89] 证明该方法相当于 PCW 方法中令描述夹杂分布椭球的形状与取向与所含的夹杂一致, 因此 Mori-Tanaka 方法所描述的是如图 9 微结构的分布形式, 但这种分布形式不能满足 PCW 方法所需要的 $\Omega_{rs} = \Omega_{sr}$ 的要求, 因此它不能在 PCW 方法给出的微结构中实现.

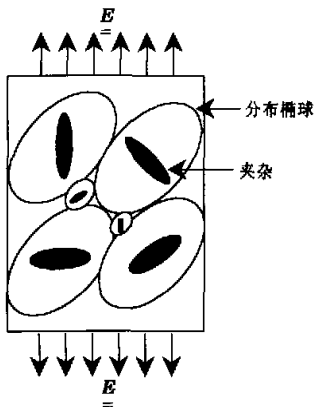


图 8 PCW 方法的微结构

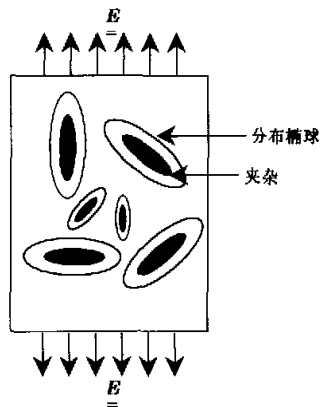


图 9 Mori-Tanaka 模型的微结构

有效自洽方法和 IDD 估计及双夹杂方法实际上扩展了 PCW 方法中简单分布椭球的概念, 他们将每一夹杂都独立定义一个分布椭球, 这个分布椭球对于不同的夹杂可以不同, 并由此来描述夹杂的局部分布特性. 它们所描述的微结构分布形式如图 10 所示. 这种分布, 在统计的意义上更加适合高密度夹杂问题. 图 11 给出了自洽方法所适应的微结构分布, 该方法更适用于无连续相复合材料.

从图 8, 图 9 和图 10 不难看出 PCW(KT) 与 Mori-Tanaka 方法、有效自洽方法和 IDD 估计及双夹杂方法在一些特殊情况下如: 球形夹杂或夹杂单向排列, 通过适当选取分布椭球形状可

以得到前面所提到的联系。针对实际复合材料如何选择恰当的细观力学模型或估计的问题，应该考虑到模型的原型中假设或隐含的对微结构特征的要求。由于不同的模型实际上反映着不同的微结构分布形式，因此单单从预测结果的比较来判定模型的好坏是没有意义的。发展新的细观力学模型的方向，是计及到更多的微结构参数或特征、适合更大的范围，同时保有一定的简单性。

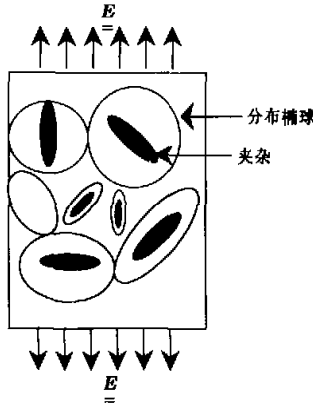


图 10 有效自洽方法或双夹杂方法的微结构分布

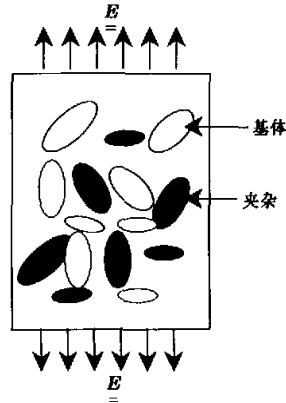


图 11 自洽法的微结构分布

为了说明上述观点，下面就 PCW 方法、MT 方法及 HS 界限对夹杂在空间任意取向的复合材料模量的预测进行比较 (图 12, 图 13)^[90]。在下面的计算中材料常数为：夹杂 $E_1 = 468 \text{ GPa}$, $\nu_1 = 0.18$, 基体 $E_0 = 68.3 \text{ GPa}$, $\nu_0 = 0.33$ 。

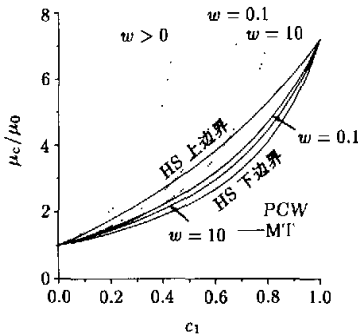


图 12 复合材料剪切模量的比较

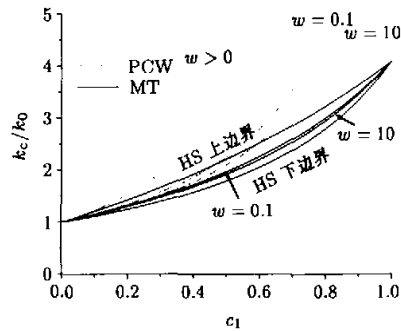


图 13 复合材料体积模量的比较

图中 w 是夹杂的长细比， c_1 是夹杂的体积百分比。PCW 方法中为得到各向同性复合材料，令夹杂的分布为各向同性，对应分布椭圆为球形。从图 12 和 13 可以看出 PCW 方法的预测始终高于 Mori-Tanaka 方法的预测，而 PCW 方法在大于一定夹杂体积百分比后的预测结果会超出 HS 界限。造成上述结果的原因主要是 PCW 方法具有其适用范围，由于 PCW 方法给出了呈椭圆型分布的复合材料微结构分布形式，当夹杂分布椭圆的长细比固定时，为了能够实现上述分布，夹杂的可取体积百分比范围将受到很大的限制。如对于各向同性分布，应保证如下关系： $w \leq 1, c_1 \leq w$; $w \geq 1, c_1 \leq 1/w^2$ ，否则将不能实现各向同性分布，因此预测结果在一定的夹杂体积后会超出 HS 界限，这一点在应用 PCW 方法对复合材料模量预测时应加以注意。

在结束有关细观力学近似模型的讨论时，还应指出的是上述所讨论的模型是一些典型的模型，还有许多近似模型，如周期单元方法^[111]和在此基础上的积分方法^[112]，统计方法^[113]和

基于椭圆(或球)形构型的一些其他近似方法^[114,115],及从物理的观点发展起来的多重散射理论^[98],这里不一一评述,可参见有关文献。

6 讨论与结论

本文就分析复合材料有效弹性性质的方法进行了较系统的介绍,从有效性质的普适关系、界限理论及近似方法三个不同的角度,阐述了分析复合材料有效弹性性质的典型思路、所采用的一些主要方法和所取得的一些主要结果。论文还重点强调了不同方法之间,不同模型之间的相互联系,并给出了主要近似方法所对应的微结构分布形式。但由于作者的认知局限性,恐怕难免没有描述到一些重要文献。此外,由于作者个人喜好的不同,我们对文献和进展的强调和取舍,也难以全面客观。在此请有关研究者予以谅解。

尽管分析复合材料的有效性质的细观力学方法经过近半个世纪努力,得到了长足的发展,发展了许多有效的模型,为复合材料的微结构设计提供了理论基础。但随着研究的深入和新问题的不断提出,前面所讲述的细观力学方法已暴露出它的局限性。一个显著例子是,当所研究的材料尺度与微观尺度较接近时,由于缺少了大量的统计环境,材料的宏观性能常常表现出尺度相关性,前面所讲述的方法还不能计及尺度参数的影响。在宏观应力(应变)梯度较大的情况如在裂纹尖端和界面处, Hill 的宏观均匀性假设不再成立,在这种情况下还缺乏有效的宏观过渡法则。由于复合材料的微结构特点,它的响应本质上具有非局部性的特性^[116]。宏观上部分考虑这种非局部性的连续介质力学理论,如 Cosserat 理论^[117]、极性理论^[118]、偶应力理论^[119]等已得到了较大的发展,但对应着上述连续介质力学框架下的宏观过渡法则和细观力学方法目前还不清晰。有关该方面的研究已成为目前细观力学研究的热点^[14,16,120~122]。人们往往希望除了对有效性质预测外,还希望细观力学模型能对复合材料在外载作用下的非线性过程(损伤,塑性)进行描述。由于塑性和损伤的发展是一个与夹杂局部构型密切相关的过程,因此还需要发展能更精确反映局部应力状态与周围夹杂分布关系的细观力学方法。现有方法尚不能有效计及微结构的空分布特征,而这种特征对材料性质强韧性、损伤等具有至关重要的影响。

参 考 文 献

- 1 Ashby M F, Jones D R H. Engineering Materials 1: An Introduction to Their Properties and Application, Pergamon Press, 1980
- 2 郑泉水、黄克智等. 世纪之交的力学——参加第20届国际理论与应用力学大会有感. 力学进展, 2001, 30(3): 478~480
- 3 Zheng Q S. Mechanics of Inhomogeneous Materials. Lecture Notes. Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, 2000
- 4 Hill R. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J Mech Phys of Solids*, 1967, 15: 79~95
- 5 Bensoussan A, Lions J L. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam: North Holland, 1978
- 6 Oleinik O A, Shamaev A S, Yosifian G A. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. Amsterdam: North Holland, 1992
- 7 Cui J Z, Yang H Y. A dual coupled method for boundary value problems of PDE with coefficients of small period. *J Comput Math*, 1996, 14: 159~174
- 8 Cao L Q, Cui J Z. Homogenization theory for the quasi-periodic elastic structures of composite materials. *Math Num Sin*, 1999, 21: 331~344
- 9 Lemaitre J. Formulation and identification of damage kinetic constitutive equations. In: Krajcinovic D, Lemaitre J, eds. Continuum Damage Mechanics Theory and Applications. Wien-New-York: Springer-Verlag, 1987
- 10 Huet C. Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. *J Mech Phys of Solids*, 1990, 38: 813~841
- 11 Ostojic-Starzewski M. Random field models of heterogeneous materials. *Int J Solids and Structures*, 1998, 35: 2429~2455
- 12 Drugan W J, Willis J R. A micromechanical-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. *J Mech Phys of Solids*, 1996, 44: 497~524

- 13 Gusev A A. Representative volume element size for elastic composite a numerical study. *J Mech Phys of Solids*, 1997, 45: 1449~1459
- 14 Luciano R, Willis J R. Bounds on non-local effective relations for random composites loaded by configuration dependent body force. *J Mech Phys of Solids*, 2000, 48: 1827~1849
- 15 Peculan S, Gibiansky L V, Torquato S. Scale effects on the elastic behavior of periodic and hierarchical two-dimensional composites. *J Mech Phys of Solids*, 1999, 47: 1509~1542
- 16 Zuiker J, Dvrok G J. The effective properties of functionally graded composites—I: Extension of the Mori-Tanaka method to linearly varying fields. *Composite Engineering*, 1994, 4: 19~35
- 17 Ren ZY, Zheng Q S. A quantitative study on minimum sizes of representative volume elements of cubic polycrystals—Numerical experiments. *J Mech Phys of Solids*, 2001 (in press)
- 18 Wen M, Zheng Q S, Du D X. Some basic problems in numerically simulating effective properties and local fields of composite materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1999, 12: 328~339
- 19 Suquet P. Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In: Sanchez-Palencia E, Zaoui A, eds. *Homogenization Techniques for Composites Media*. Lecture notes in Physics 272. Berlin: Springer-Verlag, 1987. 193~278
- 20 Mishnaevsky L L, Schmauder S. Continuum mesomechanical finite element modeling in materials development: A state-of-the-art review. *Appl Mech Rev*, 2001, 54: 49~66
- 21 方岱宁. 先进复合材料的宏观力学与强韧化设计: 挑战与发展. *复合材料学报*, 2001, 17: 1~7
- 22 Muskhelishvili N I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Groningeng: Noordhoof, 1963. 164~166
- 23 Dundurs J. Effect of elastic constants on stress in a composite under plane deformation. *J Composite Materials*, 1967. 1310~1322
- 24 Day A R, Snyder K A, Garboczi E J, Thorpe M F. The elastic moduli of a sheet containing circular holes. *J Mech Phys of Solids*, 1992, 40: 1031~1051
- 25 Zheng Q S, Hwang K C. Two-dimensional elastic compliances of materials with holes and microcracks. *Proc R Soc Lond*, 1997, A 453: 353~364
- 26 Zheng Q S, Hwang K C. Reduced dependence of defect compliance on matrix and inclusion elastic properties in two-dimensional elasticity. *Proc R Soc Lond*, 1996, A 452: 2493~2507
- 27 Zheng Q S, Chen T. Generalized plane deformation of electromagnetic thermoelastic solids I. Correspondence and invariance shifts. *Proc R Soc Lond*, 1999, A 455: 1283~1299
- 28 Zheng Q S, Chen T. Generalized plane deformation of electromagnetic thermoelastic solids II. Further results on invariance shifts and reduced dependences. *Proc R Soc Lond*, 1999, A 455: 1301~1314
- 29 Yang W, Ma C C. Orthotropic transform for planar anisotropic elasticity and reduced dependence of elastic constants. *Proc R Soc Lond*, 1998, A 454: 1843~1855
- 30 Cherkav A V, Lurie K A, Milton G W. Invariant properties of the stress in plane elasticity and equivalence classes of composites. *Proc R Soc Lond*, 1992, A438: 519~529
- 31 Dundurs J, Markenscoff X. Invariance of stresses under a change in elastic compliance. *Proc R Soc Lond*, 1993, A 443: 289~300
- 32 Moran B, Gosz M. Stress invariance in plane anisotropic elasticity. *Modelling Simul Mater Sc. Engng*, 1994, 2: 677~688
- 33 Thorpe M F, Jasiuk I. New results in the theory of elasticity for two-dimensional composites. *Proc R Soc Lond*, 1992, A 438: 531~544
- 34 Chen T. Further results on invariant properties of the stress in plane elasticity and its extension to piezoelectricity. *Mech Res Comm*, 1995, 22: 251~256
- 35 He Q C. More on stress invariance conditions for the traction boundary valued problem of plane linear elasticity. *Int J Solids Structures*, 1998, 35: 3519~3537
- 36 Du D X, Zheng Q S. A note on Cauchy-Voigt dispute of independent constants in anisotropic elastic Hooke's law. *Mech Res Comm*, 1999, 26: 295~300
- 37 Ostojia-Starzewski M, Jasiuk I. Stress invariance in planar Cosserat elasticity. *Proc R Soc Lond*, 1995, A 451: 453~470
- 38 Norris A N. Stress invariance and redundant moduli in three-dimensional elasticity. *Proc R Soc Lond*, 1999, A 455: 4097~4116
- 39 Du D X, Zheng Q S. Consistency between independence theorems and generalized self-consistent method. *Acta Mech. Sinica*, 1997, 13: 355~365
- 40 Hu G K, Weng G J. A new derivative on the shift property of effective elastic compliances for planar and 3-D composites. *Proc R Soc Lond*, A, 2001, 457: 1675~1684
- 41 Bobeth M, Diener G. Static elastic and thermoelastic field fluctuation in multiphase composites. *J Mech Phys of Solids*, 1987, 35: 137~149
- 42 Kreher W, Pompe W. Internal stresses in heterogeneous solids. Berlin: Academia-Verlag, 1989
- 43 Hu G K. A method of plasticity for general aligned spheroidal void or fiber reinforced.Composites, *Int J Plasticity*, 1996, 12: 439~449
- 44 Hill R. The elastic behavior of a crystalline aggregate. *Proc Phys Soc*, 1952, A 65: 349~354

- 45 Hashin Z, Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of polycrystals. *J Mech Phys of Solids*, 1962, 10: 335~342
- 46 Hashin Z, Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *J Mech Phys of Solids*, 1963, 11: 127~140
- 47 Bornert M. Morphologie microstructurale et comportement mecanique; caraterisations experimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes generalisees. [Ph D Thesis] ENPC, 1996
- 48 Willis J R, Variational principle and bounds for the overall properties of composites. In: Provan JW, ed. *Continuum Models of Disordered Systems*. Waterloo: University of Waterloo Press, 1978. 185~215
- 49 Zeller R, Dederichs P H. Elastic constants of polycrystals. *Phys Stat Sol(b)*, 1973, 55: 831~842
- 50 Willis J R. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Adv Appl Mech*, 1981, 21: 1~78
- 51 Buryachenko V A. Multiparticle effective field and related methods in micromechanics of composites materials. *Appl Mech Rev*, 2001, 54: 1~47
- 52 Zaoui A, Structural morphology and constitutive behavior of microheterogeneous materials. In: Suquet P, ed. *Continuum Micromechanics, CISM, Courses and Lectures*. Wien-NY: Springer, 1997. 377: 291~347
- 53 Willis J R. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *J Mech Phys of Solids*, 1977, 25: 185~202
- 54 Ponte Castaneda P, Willis J R. The effect of spatial distribution on effective behavior of composite materials and cracked media. *J Mech Phys of Solids*, 1995, 43: 1919~1951
- 55 Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problem. *Proc R Soc Lond*, 1957, A241: 376~396
- 56 Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J Appl Mech*, 1962, 29: 143~150
- 57 Francfort G A, Murat F. Homogenization and optimal bounds in linear elasticity. *Archives Rat Mech Analyses*, 1986, 94: 307~334
- 58 Milton G. Modeling the properties of composites by laminates. In: Ericksen J L, Kinderlehrer D, Kohn R, Lions J L, eds. *Homogenization and Effective Moduli of Materials and Media*. New York: Springer-Verlag, 1986. 150~174
- 59 Norris A N. A differential scheme for the effective moduli of composites. *Mech Mat*, 1985, 4: 1~16
- 60 Stolz C, Zaoui A. Analyse morphologique et approches variationnelles du comportement d'un milieu elastique heterogene. *C R Acad Sci Paris*, 1991, II312: 143~150
- 61 Bornert M, Stolz C, Zaoui A. Morphologically representative pattern-based bounding in elasticity. *J Mech Phys of Solids*, 1996, 44: 307~331
- 62 Herve E, Stolz C, Zaoui A. A propos de l'assemblage des spheres composite de Hashin. *C R Acad Sci Paris*, 1991, II313: 857~862
- 63 Dai L H, Huang Z P, Wang R. Explicit expressions for bounds for the effective moduli of multi-phased composites by generalized self-consistent method. *Composite Science and Technology*, 1999, 59: 1691~1699
- 64 Beran M, Molyneux J. Use of classical variational principles to determine bounds for the effective bulk modulus in heterogeneous medium. *Q Appl Math*, 1966, 24: 107~118
- 65 McCoy J J. On the displacement field in an elastic medium with random variations in material properties. In: Eringen A C, ed. *Recent Advances in Engineering Sciences*. New York: Gordon and Beach, 1970. 5: 235~254
- 66 Milton G W. Bounds on the electromagnetic, elastic and other properties of two-component composites. *Phys Rev Lett*, 1981, 46: 542~545
- 67 Gibiansky L V, Torquato S. Geometrical-parameter bounds on the effective moduli of composites. *J Mech Phys of Solids*, 1995, 43: 1587~1613
- 68 Torquato S. Random heterogeneous media: Microstructure and improved bounds on effective properties. *Appl Mech Rev*, 1991, 44: 37~75
- 69 Cherkaev A V, Gibiansky L V. The exact coupled bounds for effective tensors of electrical and magnetic properties of two-component two-dimensional composites. *Proc of Royal Soc of Edinburgh*, 1992, A 122: 93~125
- 70 Milton G W. The field equation recursion method. In: Dal Maso G, Dal Antonio G, eds. *Composite Media and Homogenization Theory*. Boston: Birkhauser, 1991, 5: 223~245
- 71 Levin V M. Thermal expansion coefficient of heterogeneous materials. *Mech Solids*, 1967, 2: 58~61
- 72 Gibiansky L V, Torquato S. Link between the conductivity and elastic moduli of composite. *Phys Rev Lett*, 1993, 71: 2927~2930
- 73 Markov K. Elementary micromechanics of heterogeneous media. In: Markov K, Preziosi L, eds. *Heterogeneous Media: Micromechanics Modeling Methods and Simulations*. Boston: Birkhauser, 2000. 1~162
- 74 Hazanov S, Huet C. Order relationship for bounding conditions effect in heterogeneous bodies smaller than representative volume. *J Mech Phys of Solids*, 1994, 42: 1995~2011
- 75 Gibiansky L V, Torquato S. New method to generate three-point bounds on effective properties composites: application to viscoelasticity. *J Mech Phys of Solids*, 1998, 46: 749~783
- 76 Milton G W. A brief review of the translation method for bounding effective elastic tensors of composites. In: Maugin G A, ed. *Continuum Models and Discrete Systems*. Essex: Longman, 1991. 60~74

- 77 Torquato S. Effective stiffness tensor of composite media—I: Exact series expansion. *J Mech Phys of Solids*, 1997, 45: 1421~1448
- 78 Torquato S. Effective stiffness tensor of composite media—II: Application to isotropic dispersions. *J Mech Phys of Solids*, 1998, 46: 1411~1440
- 79 Francois D, Pineau A, Zaoui A. Comportement Mecanique des Materiaux. I, Paris: Hermes, 1991
- 80 胡更开. 复合材料宏观性能的细观力学研究. 力学与实践, 1996, 18: 6~11
- 81 Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. La Hague, Martinus Nijhoff, 1982
- 82 Cheng Z Q, He L H. Micropolar elastic fields due to a spherical inclusion. *Int J Eng Sci*, 1995, 33: 389~397
- 83 Kachanov M. Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts. *Appl Mech Rev*, 1992, 48: 304~335
- 84 Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall Mater*, 1973, 21: 571~574
- 85 Benveniste Y. A new approach to the application of the Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 1987, 6: 147~157
- 86 Weng G J. The theoretical connection between Mori-Tanaka's theory and the Hashin-Shtrikman-Walpole bounds. *Int J Eng Sci*, 1990, 28: 1111~1120
- 87 Weng G J. Explicit evaluation of Willis' bounds with ellipsoidal inclusions. *Int J Eng Sci*, 1992, 30: 83~92
- 88 Hu G K, Weng G J. Connection between the double inclusion model and the Ponte Castaneda-Willis, Mori-Tanaka, and Kuster-Toksoz model. *Mechanics of Materials*, 2000, 32: 495~503
- 89 杜丹旭. 多相材料有效性质的理论研究. 清华大学工程力学系博士论文, 2000
- 90 Hu G K, Weng G J. Some reflections on Mori-Tanaka and Ponte Castaneda-Willis methods with randomly oriented ellipsoidal inclusions. *Acta Mechanica*, 2000, 140: 31~40
- 91 Ferrari M. Asymmetry and high concentration limit of the Mori-Tanaka effective medium theory. *Mechanics of Materials*, 1991, 11: 251~256
- 92 Benveniste Y, Dvorak G J, Chen T. On diagonal and elastic symmetry of the approximate effective stiffness tensor of heterogeneous media. *J Mech Phys of Solids*, 1991, 39: 927~946
- 93 Kuster G T, Toksoz M N. Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media: I Theoretical formulation. *Geophysics*, 1974, 39: 587~606
- 94 Berryman J G, Berge P A. Critique of two explicit schemes for estimating elastic properties of multiphase composites. *Mechanics of Materials*, 1996, 22: 149~164
- 95 Hershey A V. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *J Appl Mech*, 1954, 21: 226~240
- 96 Kroner E. Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls. *Z Phys*, 1958, 151: 504~518
- 97 Christensen R M. A critique evaluation for a class of micro-mechanics models. *J Mech Phys of Solids*, 1990, 38: 379~404
- 98 Nan C W. Physics of inhomogeneous inorganic materials. *Progress in Materials Science*, 1993, 37: 1~116
- 99 杜善义, 王彪. 复合材料细观力学基础. 北京: 科学出版社, 1999
- 100 Christensen R M, Lo K H. Solutions for effective shear properties in three phase space and cylinder model. *J Mech Phys of Solids*, 1979, 27: 315~330
- 101 Christensen R M. Two theoretical elasticity micromechanics models. *Journal of Elasticity*, 1998, 50, 15~25
- 102 Huang Y, Hu K X, Chandra A. A generalized self-consistent mechanics method for composite materials with multiphase inclusions. *J Mech Phys of Solids*, 1994, 42: 491~504
- 103 Huang Y, Hu K X, Chandra A. A generalized self-consistent mechanics method for microcracked solids. *J Mech Phys of Solids*, 1994, 42, 1273~1291
- 104 Herve E, Zaoui A. N-layered inclusion-based micromechanical modeling. *Int J Eng Sci*, 1993, 31: 1~10
- 105 Zheng Q S, Du D X. Closed-form interacting solutions for overall elastic moduli of composite materials with multi-phase inclusions, holes and microcracks. *Key Engineering Materials*, 1998, 145-149: 479~488
- 106 Zheng Q S, Du D X. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. *J Mech Phys of Solids*, 2001 (in press)
- 107 Du D X, Zheng Q S. A further exploitation of the interaction direction derivative (IDD) estimate for the effective properties of multiphase composites taking into account inclusion distribution. *Acta Mechanica*, 2001 (in press)
- 108 Li J Y, Feng X Q. Analysis of interaction of numerous microcracks. 2001(submitted for publication)
- 109 Hori M, Nemat-Nasser S. Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites. *Mechanics of Materials*, 1993, 14: 189~206
- 110 Nemat-Nasser S, Hori M. Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials. North-Holland: Elsevier, 1993
- 111 Sanchez-Palencia E. Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques et heterogenes. *Int J Engng Sci*, 1974, 12: 331~351
- 112 Wu L Z, Meng S, Du S Y. The overall response of composite materials with inclusions. *Int J Solids and Structures*, 1997, 34: 3021~3039
- 113 Wang B. A general theory of media with randomly distributed inclusion—I: The average field behaviors. *J Appl Mech*, 1990, 57: 857~862

- 114 Dai L H, Huang Z P, Wang R. An explicit expressions of the effective moduli for composite materials filled with coated inclusion. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, 14: 37~52
- 115 詹世革. 微裂纹细观损伤理论. 中科院力学所博士论文, 1999
- 116 Kunin I A. Elastic Media with Microstructure. Volume 2. Berlin: Springer-Verlag, 1983
- 117 Cosserat E, Cosserat F. Theorie des Corps Deformables. Paris: Hermann, 1909
- 118 Eringen A C. Microcontinuum, Field Theory. Springer, 1999
- 119 Mindlin R D. Micro-structure in linear elasticity. *Arch Rat Mech Analyses*, 1964: 51~78
- 120 Forest S, Barbe F, Cailletaud G. Cosserat modeling of size effects in the mechanical behavior of polycrystals and multi-phase materials. *Int J Solids and Structures*, 2000, 37: 7105~7126
- 121 De Buhan P, Bruno S. Micropolar multiphase models for materials reinforced by linear inclusions. *Eur J Mech A/Solids*, 2000, 19: 669~687
- 122 Schraad M W, Triantafyllidis N. Scale effects in media with periodic and nearly periodic microstructures, Part I: Macroscopic properties, II: Failure mechanisms. *J Appl Mech*, 1997, 64: 751~771

MICROMECHANICS METHODS FOR EFFECTIVE ELASTIC PROPERTIES OF COMPOSITE MATERIALS*

Hu Gengkai

Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Zheng Quanshui

Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China

Huang Zhuping

Department of Mechanics and Engineering Sciences, Peking University, Beijing 100871, China

Abstract Correlating the effective properties of composite materials with their microstructures is a basis for optimization design of composite materials. In this review article, the focus is on the basic ideas and major methods for analyzing the effective properties, mostly within the framework of elasticity. After a brief discussion on the concept of representative volume element, the micromechanics methods, major results and recent advances on the effective properties of composite materials are described in a fairly comprehensive manner on three predominate aspects: the universal relations, the upper and lower bounds and the approximate estimates. The relations and differences among various models, methods and estimates are analyzed based upon the configuration concept and microstructures. Finally, some comments are made on some research topics of current interest and some open questions in the field of effective properties of heterogeneous materials.

Keywords composite materials, effective properties, micromechanics, elasticity

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 10032010, 19802003, 19525207, 19891180)