

## Isolating low-frequency vibration via lightweight embedded metastructures

赵伟佳, 王倚天, 朱睿, 胡更开 and 胡海岩

Citation: [中国科学: 物理学 力学 天文学](#) **50**, 090010 (2020); doi: 10.1360/SSPMA-2020-0153

View online: <https://engine.scichina.com/doi/10.1360/SSPMA-2020-0153>

View Table of Contents: <https://engine.scichina.com/publisher/scp/journal/SSPMA/50/9>

Published by the [《中国科学》杂志社](#)

---

### Articles you may be interested in

[Low-frequency band gap mechanism of torsional vibration of lightweight elastic metamaterial shafts](#)

European Physical Journal AP(Applied Physics) **75**, 10501 (2016);

[Experimental investigation of the low-frequency impact sound transfer function of lightweight wooden floors via heel drops](#)

Acta Acustica **4**, 23 (2020);

[LOFAR: The LOW-Frequency ARray](#)

Astronomy & Astrophysics **556**, A2 (2013);

[Low-frequency waves in magnetic reconnection](#)

Chinese Science Bulletin **57**, 1461 (2012);

[THE BIOLOGICAL FUNCTIONS OF LOW-FREQUENCY PHONONS](#)

Scientia Sinica **20**, 447 (1977);

---



# 轻质嵌入式超结构的低频抑振研究

赵伟佳, 王倚天, 朱睿\*, 胡更开, 胡海岩

北京理工大学宇航学院力学系, 北京 100081

\*联系人, E-mail: [ruizhu@bit.edu.cn](mailto:ruizhu@bit.edu.cn)

收稿日期: 2020-04-28; 接受日期: 2020-06-16; 网络出版日期: 2020-08-06

国家自然科学基金(编号: U183760001, 11991030, 11991033)和北京理工大学科技创新计划(编号: 2018CX01031)资助项目

**摘要** 轻质结构在航天、航空与车辆等重要工程领域应用广泛. 传统的点阵与栅格轻质结构虽具有优秀的静力学性能, 但往往难以兼具优良的动力学性能. 近年来出现的超结构具有可定制化设计的人工微结构, 从而具有传统工程结构所不具备的奇特力学性能, 有望解决后者在静承载与动态功能设计上的固有矛盾, 进而为轻质承载结构带来颠覆性的低频抑振方法. 本文首先提出一种以蜂巢栅格结构为基体的超结构, 通过在栅格空隙中嵌入树脂3D打印的轻质亚波长谐振微结构, 实现了针对单一形式振动的隔离. 然后, 针对不同方向的振动与耦合形式的振动, 通过定制化的微结构排布, 实现了对多形式振动的有效抑制. 最后, 针对轻质结构在航天工程等领域面临的低频振动难题, 通过几何优化和准零刚度设计两种方法改进嵌入式超结构, 并从数值和实验上验证了其低频抑振效果.

**关键词** 超结构, 轻质, 准零刚度, 低频隔振, 极化, 3D打印

**PACS:** 43.40.+s, 46.32.+x, 46.40.-f, 46.70.-p, 46.90.+s

## 1 引言

工程振动影响着许多重要装备如卫星、飞机和精密机械设备的正常运行. 其中, 低频振动因其波长长、穿透强的特性, 采用传统耗能手段需要很大的质量和尺寸才能有效地将其抑制<sup>[1]</sup>. 另一方面, 轻质、紧凑的栅格结构, 如蜂巢结构等, 具有优秀的静力学性质, 如出色的比强度和比刚度, 常被用作承载结构并应用于各种重大工程中<sup>[2-4]</sup>. 但是, 栅格结构固有的小质量和低阻尼特性, 使其非常容易受到低频环境振动的影响,

限制其进一步推广. 因此, 有必要提出一种新的轻质结构抑振机理, 并发展相应的设计方法和实验验证手段.

近年来, 超材料/超结构的出现受到了研究者的广泛关注. 超材料/超结构凭借其可人工设计的亚波长微结构, 具有颠覆性的动态等效属性, 给低频波调控带来了新途径, 因而被看作是实现轻质低频隔振的一种潜在手段<sup>[5]</sup>. 2000年, Liu等人<sup>[6,7]</sup>首先提出局域谐振型超材料. 他们将橡胶包裹的小铅球作为亚波长谐振微结构, 并周期性地嵌入到环氧树脂基体中, 从而构成

**引用格式:** 赵伟佳, 王倚天, 朱睿, 等. 轻质嵌入式超结构的低频抑振研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 090010

Zhao W J, Wang Y T, Zhu R, et al. Isolating low-frequency vibration via lightweight embedded metastructures (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2020, 50: 090010, doi: [10.1360/SSPMA-2020-0153](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2020-0153)

能阻隔低频声波的超材料. 此后, 研究者们<sup>[8,9]</sup>利用一维弹簧-质量模型系统地解释了超材料的低频阻波机理, 并计算了禁带中的等效负质量. 为应对工程实际中的问题, 研究者在现有工程结构上设计出了多种具有等效负密度的超结构, 并研究了它们对低频振动的阻隔效果. 其中, Yu等人<sup>[10]</sup>以铝梁为基体, 通过在其上周期性地排布由橡胶和铜环构成的谐振微结构来组成超结构, 并成功阻隔了梁的弯曲振动. 之后, 他们还进一步研究了边界条件对超结构梁隔振效果的影响<sup>[11]</sup>. Nateghi等人<sup>[12]</sup>以铝管为基体, 通过在管壁上周期性地粘贴由聚合物制成的微结构组成了超结构, 并有效抑制了基体管的第二阶共振峰. Zhu等人<sup>[13]</sup>以不锈钢板为基体, 通过激光雕镂的方式在其上加工了精密的微结构, 并通过仿真和实验研究了该超结构板对出面振动的抑制效果.

然而, 基于高密度金属材料和切镂减材制造得到的微结构不可避免地为超结构带来了总质量增加和制备效率低下的问题, 限制了其的实际应用. 近年来快速发展的树脂增材制造(3D打印)技术, 可以高效地制备尺寸小、结构复杂的精密微结构, 有力地推动了超材料/超结构的工程应用. Qureshi等人<sup>[14]</sup>利用3D打印技术快速制备了超结构梁, 并用实验研究了其对纵向振动的隔离效果. Li等人<sup>[15]</sup>3D打印了超结构板, 并通过粘贴在谐振微结构上的压电片和控制电路同时实现了振动抑制和能量收集两种功能. 由此可见, 3D打印技术使得超结构的选材和设计不再受传统制备工艺的约束, 能更好地发挥超结构强大的波动控制功能.

但是, 全树脂打印的超结构很难面对结构静承载能力以及环境适应能力要求较高的场合, 因此在许多工程应用中无法被使用. 嵌入式的超结构设计方法可以为这个问题带来解决思路. Chen等人<sup>[16]</sup>提出了一种三明治超结构梁. 该超结构由上下面板和嵌有谐振器的泡沫夹芯构成. 三明治梁基体保证了结构的静力学承载能力, 而内部的谐振器令结构能阻隔弯曲振动的传播. Yu和Lesieutre<sup>[17]</sup>进一步用3D打印技术制备了静强度较高的蜂巢三明治板, 并在其中嵌入低强度的谐振微结构, 从而构成可以隔离面外振动的超结构板. 这些嵌入式设计既考虑了超结构的静力学承载能力, 又达到了谐振微结构与基体结构有效耦合的目的. 现有的超结构研究大多没有考虑工程环境的复杂性, 当振源为多种极化形式的振动组合时, 或者振源改变时,

缺少通过重构自身适应环境的能力. Ma等人<sup>[18]</sup>提出了一种可重构的超结构杆, 这种超结构杆可以通过自身的重构分别隔离弯曲振动、纵向振动和扭转振动, 但过程非常繁琐.

超结构抑振的工作频率与谐振微结构的设计密切相关. 针对工程中最关心的低频抑振问题, 可以分别通过增加微结构中的谐振质量或者减小微结构刚度来实现对微结构谐振频率的降低, 从而使超结构工作在对应的低频区域. Zhu等人<sup>[19]</sup>将钨柱和橡胶构成的谐振微结构周期性地嵌入手性栅格结构中构成超结构梁, 通过增大谐振微结构的质量生成低频禁带, 从而实现低频隔振效果. 但这种设计会增加结构质量, 不利于应用. 减小谐振微结构的等效刚度可以将超结构的禁带移向低频, 从而在实现低频隔振功能的同时保持结构的轻质. Inman课题组<sup>[20,21]</sup>提出的曲折形微结构设计以及Bilal等人<sup>[22,23]</sup>提出的柱-洞形微结构设计, 都是通过优化微结构几何构型的方式来降低其等效刚度, 从而实现低频隔振. 然而, 过于复杂的微结构设计不仅难以保证加工精度, 而且还受限于最低的可设计谐振频率.

为了获得尽可能低的隔振频率, 人们探索了准零刚度(Quasi-Zero Stiffness, QZS)设计. 例如, 通过将两根压缩斜弹簧构成的负刚度元件与一根竖直弹簧构成的正刚度元件并联, 即可得到准零刚度的弹簧模型<sup>[24]</sup>. Xu等人<sup>[25,26]</sup>将凸轮、转子和弹簧等效为三弹簧模型, 设计了准零刚度隔振机构. Li等人<sup>[27]</sup>利用屈曲板和弹簧, Haberman课题组<sup>[28]</sup>通过屈曲梁和弹簧分别实现了准零刚度结构. 这些研究很好地实现了极低的等效刚度, 但所设计的结构都比较复杂笨重. 此外, 目前大多数将准零刚度应用于超结构设计的研究都处于理论阶段<sup>[29-31]</sup>, 尚缺乏实验研究.

本文提出了一种基于轻质蜂巢结构的嵌入式超结构. 通过有策略地嵌入谐振微结构, 该超结构可以隔离不同形式的振动, 同时不影响结构整体的静态承载能力. 我们首先分析了由3D打印微结构产生的极化禁带. 通过简单的旋转微结构, 超结构可以从横波禁带转化为纵波禁带, 对应的隔振能力也随之发生改变. 接着通过仿真和实验验证了超结构对多种形式振动的隔离效果. 最后, 通过几何优化和引入准零刚度两种方法设计了具有低频禁带的轻质超结构, 并用实验验证了其低频隔振效果.

## 2 嵌入式微结构设计及超结构隔振实验

首先, 我们选用中间含圆孔的手性蜂巢栅格梁作为超结构的基体结构. 图1(a)展示了手性蜂巢栅格梁及其单胞的放大图. 如图所示, 该基体既具有蜂巢结构的高比强度和比刚度, 又能方便地嵌入设计好的微结构. 其中, 栅格结构的拓扑参数、圆孔的半径和边框的厚度分别为 $L/R$ ,  $R_0$ ,  $t_1$ . 整个梁由40个周期排布的栅格单胞和长方形外框组成. 梁的长度为 $L_0=417$  mm, 高度为 $H_0=91$  mm, 宽度为 $W_0=10$  mm. 利用水刀切割技术, 在10 mm厚的铝板上直接切出了栅格单胞, 其结构的几何参数和材料参数如表1所示. 借助商业有限元软件ANSYS, 计算了平面应力条件下栅格单胞的带结构, 如图1(b)所示. 计算结果显示, 在4 kHz以上的高频区域, 出现了两条由布拉格散射产生的完全禁带(灰色阴影区域). 在完全禁带中, 任何形式的弹性波都无法传播. 而在低于2 kHz的低频区域, 横波和纵波都可传播.

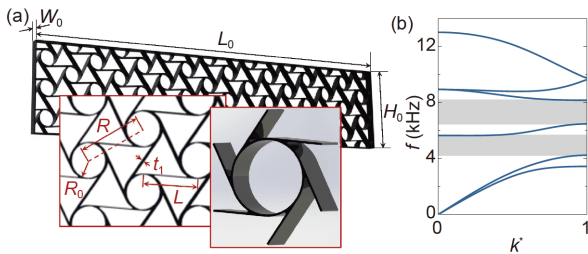


图1 (网络版彩图) (a) 手性蜂巢栅格梁及栅格单胞; (b) 单胞带结构

Figure 1 (Color online) (a) The chiral honeycomb lattice beam and unit cell; (b) the band structure of the unit cell.

表1 栅格基体结构和谐振微结构的几何参数与材料参数

Table 1 Geometrical and material parameters of the lattice base structure and resonators

| 几何参数              | 数值   | 材料参数                        | 数值    |
|-------------------|------|-----------------------------|-------|
| 圆孔半径 $R_0$ (mm)   | 15   | 铝密度( $\text{kg m}^{-3}$ )   | 2700  |
| 边框厚度 $t_1$ (mm)   | 0.5  | 铝杨氏模量(GPa)                  | 71    |
| 拓扑参数 $L/R$        | 0.82 | 铝泊松比                        | 0.33  |
| 环形外框半径 $R_1$ (mm) | 8.34 | PLA密度( $\text{kg m}^{-3}$ ) | 1200  |
| 连接梁厚度 $d$ (mm)    | 0.4  | PLA杨氏模量(GPa)                | 4     |
| 环形外框厚度 $t_2$ (mm) | 0.25 | PLA泊松比                      | 0.394 |
| 内圆柱半径 $R_2$ (mm)  | 3.18 |                             |       |

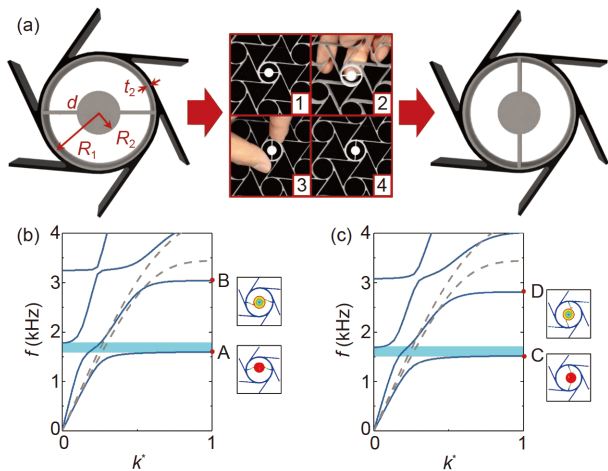
接着, 我们设计了环形谐振微结构, 并将其嵌入到栅格基体结构中, 从而产生所需的低频禁带, 如图2(a)所示. 其中, 谐振微结构环形外框的半径、环形外框的厚度、内外连接梁的厚度、内圆柱的半径分别为 $R_1$ ,  $t_2$ ,  $d$ ,  $R_2$ . 通过3D打印技术, 用聚乳酸(PLA)材料制备了环形谐振微结构, 其几何参数和材料参数也列于表1中. 在此, 采用水平( $90^\circ$ )和竖直( $0^\circ$ )两种方式将微结构嵌入到基体结构的圆孔中, 从而分别产生针对梁横向(弯曲)振动和纵向振动的低频禁带. 这两种嵌入方式可以非常简单地实现互换, 如图2(a)所示. 利用有限元计算了两种微结构嵌入方式下超结构单胞的带结构, 如图2(b)和(c)所示. 其中,  $k^* = kR/2\pi$ 是归一化波数,  $k$ 是波数,  $f$ 是频率. 由图2(b)中禁带下界A点处的单胞模态图可知, 绝大部分能量集中在沿竖直方向谐振的微结构中, 仅有少部分能量存在于基体结构. 这说明, 水平嵌入的微结构此时发生竖直方向的谐振, 打破了原带结构中的横波分支, 从而形成一条只针对横波的极化禁带(青色阴影区域). B点的模态图展示的是谐振微结构的旋转模态, 但该模态难以被激发出来. 类似地, 竖直嵌入的微结构通过水平方向谐振, 产生了图2(c)的C点模态, 从而在与横波极化禁带几乎相同的频率范围内形成一条只针对纵波的极化禁带(青色阴影区域). 图2(c)中的D点模态依然展示了微结构的旋转谐振. 利用这两条极化禁带, 可以分别阻隔超结构梁的横向振动和纵向振动. 当外界振源发生改变时, 无需重新设计超结构, 仅仅通过简单旋转现有微结构, 即可转变超结构的隔振效果.

现借助质量-弹簧模型<sup>[7]</sup>来阐述嵌入式超结构的隔振机理. 手性蜂巢栅格梁受到横向振动激励时, 可以等效成为均质的铁木辛柯梁; 受到纵向振动激励时, 则可简化为均质杆. 在没有长方形外框包围时, 栅格基体结构的等效材料参数如表2所示<sup>[18,31,32]</sup>. 针对横向振动的抑制, 将谐振微结构 $90^\circ$ 嵌入到基体中, 形成的超结构可以进一步等效为附加周期谐振子的铁木辛柯梁, 如图3(a)所示. 计算出的微结构等效刚度 $k_{\text{eff}}$ 和等效质量 $m_{\text{eff}}$ 如表2所示. 假设在简谐振动下超结构梁的横向位移为 $w(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$ , 振幅 $W(x)$ 可以表示为

$$W(x) = Aq_1^{-3}e^{q_1x} + Bq_2^{-3}e^{q_2x} + Cq_3^{-3}e^{q_3x} + Dq_4^{-3}e^{q_4x}, \quad (1)$$

其中,





**图 2** (网络版彩图) (a) 水平(90°)嵌入微结构的超结构单元、竖直(0°)嵌入微结构的超结构单元以及嵌入方式改变过程; (b) 90°嵌入超结构单元的带结构; (c) 0°嵌入超结构单元的带结构

**Figure 2** (Color online) (a) The metastructure unit cell with 90°/0° embedded resonator and their change process; band structures of the unit cell with 90° (b) and 0° (c) embedded microstructures.

$$q_p = (-1)^{[p/2]} \sqrt{\frac{[\alpha + (-1)^p \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}]}{2}}, \quad p = 1, \dots, 4,$$

$$\alpha = -\frac{\rho_{\text{eff}} \omega^2}{E_{\text{eff}}} - \frac{\rho_{\text{eff}} \omega^2}{(\kappa G)_{\text{eff}}},$$

$$\beta = \frac{\rho_{\text{eff}} A \omega^2}{E_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} - \frac{\rho_{\text{eff}}^2 \omega^4}{E_{\text{eff}} (\kappa G)_{\text{eff}}},$$

$[p/2]$ 是大于  $p/2$  的整数,  $q_p$  分别表示沿两个方向(正  $x$  方向和负  $x$  方向)的两个最低阶振动模态的波数. 根据传递矩阵法<sup>[9]</sup>, 第  $n$  个单元与第  $(n-1)$  个单元的传递关系可以写作

$$\Psi_n = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{H} \Psi_{n-1}, \quad (2)$$

其中,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} q_1^{-3} & q_2^{-3} & q_3^{-3} & q_4^{-3} \\ q_1^{-2} & q_2^{-2} & q_3^{-2} & q_4^{-2} \\ q_1^{-1} & q_2^{-1} & q_3^{-1} & q_4^{-1} \\ 1 + Fq_1^{-3} & 1 + Fq_2^{-3} & 1 + Fq_3^{-3} & 1 + Fq_4^{-3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} q_1^{-3} e^{q_1 l} & q_2^{-3} e^{q_2 l} & q_3^{-3} e^{q_3 l} & q_4^{-3} e^{q_4 l} \\ q_1^{-2} e^{q_1 l} & q_2^{-2} e^{q_2 l} & q_3^{-2} e^{q_3 l} & q_4^{-2} e^{q_4 l} \\ q_1^{-1} e^{q_1 l} & q_2^{-1} e^{q_2 l} & q_3^{-1} e^{q_3 l} & q_4^{-1} e^{q_4 l} \\ e^{q_1 l} & e^{q_2 l} & e^{q_3 l} & e^{q_4 l} \end{bmatrix},$$

$$F = \frac{1}{E_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} \frac{m_{\text{eff}} k_{\text{eff}} \omega^2}{k_{\text{eff}} - m_{\text{eff}} \omega^2}.$$

在此, 考虑  $n=30$  层的附加谐振子, 由式(2)计算出横向激励下的均质基体梁(即谐振子等效质量  $m_{\text{eff}}=0$ )和含 90° 嵌入微结构的超结构梁的频率响应函数(Frequency Response Function, FRF), 其结果分别如图3(b)中蓝线和红线所示. 图3(b)中青色区域表示利用无限大超结构计算出的横波禁带. 其中, 归一化频率定义为  $f' = f/f_0$ , 并且有  $f_0 = \frac{1}{2\pi} (k_{\text{eff}}/m_{\text{eff}})^{1/2}$ . 图中结果对比表明, 与基体梁模型相比, 等效超结构梁模型确实在局域谐振频率后呈现明显的抑振频率带, 且该频带与超结构的横波禁带符合得很好.

通过将 90° 水平嵌入的谐振微结构旋转为 0° 竖直嵌入, 超结构的横波极化禁带可以转变为纵波极化禁带, 从而由阻隔横向振动转变为阻隔纵向振动. 经过微结构旋转后, 超结构可以等效为附加周期谐振子的均质杆, 如图3(c)所示. 纵波在该等效杆模型中的解可以写作

$$u(x) = e^{-i\omega t} P_n^+ \cosh[i\beta(x-nl)] + e^{-i\omega t} P_n^- \sinh[i\beta(x-nl)], \quad (3)$$

其中,  $\beta = \omega/c$  是波数,  $c = (E_{\text{eff}}/\rho_{\text{eff}})^{1/2}$  是均质杆中的纵波波速. 利用传递矩阵法<sup>[33]</sup>, 可以写出第  $n$  个单元与第  $(n-1)$  个单元之间的传递关系

$$\Psi_n = \mathbf{T} \Psi_{n-1}, \quad (4)$$

其中,

$$\Psi_n = \begin{bmatrix} P_n^+ \\ P_n^- \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & i \sin(\beta l) \\ \frac{i k_{\text{eff}} m_{\text{eff}} \omega^2 \cos(\beta l)}{\beta \rho_{\text{eff}} c^2 A (k_{\text{eff}} - m_{\text{eff}} \omega^2)} + i \sin(\beta l) & \cos(\beta l) - \frac{k_{\text{eff}} m_{\text{eff}} \omega^2 \sin(\beta l)}{\beta \rho_{\text{eff}} c^2 A (k_{\text{eff}} - m_{\text{eff}} \omega^2)} \end{bmatrix}.$$

表 2 手性栅格基体结构和谐振微结构的等效材料参数

Table 2 Effective material properties of the chiral lattice base structure and the resonators

| 手性栅格基体结构                                        | 数值                     |
|-------------------------------------------------|------------------------|
| 等效杨氏模量 $E_{\text{eff}}$ (MPa)                   | 54.45                  |
| 等效密度 $\rho_{\text{eff}}$ ( $\text{kg m}^{-3}$ ) | 194.75                 |
| 等效惯性矩 $I_{\text{eff}}$ ( $\text{m}^4$ )         | $8.914 \times 10^{-7}$ |
| 等效剪切刚度 $(\kappa G)_{\text{eff}}$ (MPa)          | 33.34                  |
| 横截面积 $A$ ( $\text{m}^2$ )                       | $320 \times 10^{-6}$   |
| 谐振微结构                                           | 数值                     |
| 等效质量 $m_{\text{eff}}$ (kg)                      | $0.38 \times 10^{-3}$  |
| 等效弹性系数 $k_{\text{eff}}$ ( $\text{N m}^{-1}$ )   | $38.4 \times 10^3$     |

再次考虑 $n=30$ 层的附加谐振子, 可由式(4)得到纵向激励下均质杆( $m_{\text{eff}}=0$ )和含 $0^\circ$ 嵌入微结构的超结构杆的FRF曲线, 并分别以图3(d)中的蓝线和红线表示. 图3(d)中的青色区域表示无限大超结构的纵波禁带. 对比上述结果, 即可得到与梁模型相似的结论.

最后, 我们对制备的轻质嵌入式超结构进行振动测试实验, 验证其抑振效果. 图4展示了超结构振动测试实验装置. 如图所示, 超结构样件的左边固定在L形夹具上, 夹具固定在LDS V406激振器上. 激励信号由PC通过LDS LPA600功率放大器发送给激振器, 后者发出带宽为2 kHz的白噪声激励. 通过粘贴在梁上的加速度传感器测量超结构动响应, 将采集到的数据通过

Dactron PHOTON+<sup>TM</sup>动力学信号分析仪处理后传输到PC中, 再经后处理软件分析得到结果. 当测试梁弯曲振动时, 激振器通过夹具与实验样件垂直连接, 竖直激励实验样件, 加速度传感器粘贴在超结构的右上角, 接收该点竖直方向的加速度信号, 如图4所示. 当测试梁纵向振动时, 激振器水平放置, 激振器的轴线与样件的中心线共轴, 加速度传感器粘贴在超结构右端面中点, 接收样件水平方向的加速度信号.

图5(a)和(b)分别展示了 $90^\circ$ 水平嵌入和 $0^\circ$ 竖直嵌入3D打印的谐振微结构的超结构样件. 为了均衡隔振效果和结构重量, 选择嵌入30个谐振微结构. 图5(c)和(d)分别展示了基体结构、水平嵌入超结构、竖直嵌入超结构的横向振动实验结果(FRF\_Y)以及纵向振动实验结果(FRF\_X). 图中青色阴影表示有限元计算的无限大超结构的横(纵)波极化禁带. 由图5(c)可见,  $90^\circ$ 嵌入超结构的FRF\_Y曲线在接近约1.6 kHz(理论预测的禁带的下界)处迅速降低, 并在约1.7 kHz降低了40 dB, 从而完全抑制了基体结构的第三阶共振峰. 但在图5(d)中, 该超结构的FRF\_X曲线并没有在目标频率处降低, 只是由于整体质量增加而出现第一阶共振峰左移. 相对应地,  $0^\circ$ 嵌入超结构的FRF\_Y曲线没有出现明显降低, 但其FRF\_X曲线在对应的纵波禁带范围有一个很深的谷(约15 dB), 如图5(d)所示. 这些结果说明,  $90^\circ$ ( $0^\circ$ )嵌入超结构在对应的横向(纵向)振动中产生了显著的隔振效果, 但无法抑制另一种振动形式.

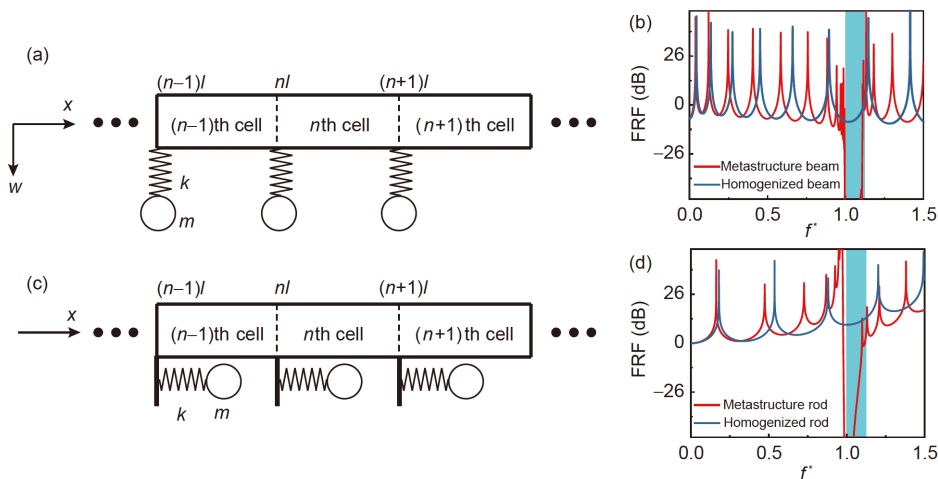
图 3 (网络版彩图)  $90^\circ$ 嵌入超结构梁模型图(a)及其频率响应函数(b);  $0^\circ$ 嵌入超结构杆模型(c)及其频率响应函数(d)

Figure 3 (Color online) Metastructure beam model with  $90^\circ$  embedded resonators (a) and its frequency response function (b); metastructure rod model with  $0^\circ$  embedded resonators (c) and FRF results (d).

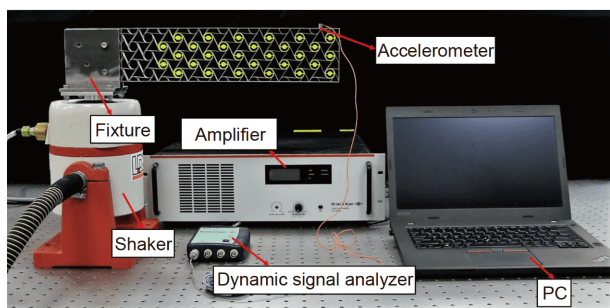


图 4 (网络版彩图)超结构振动实验平台

Figure 4 (Color online) The experimental set-up for the vibration testing of the metastructure.

上述结果很自然地引发如下设想, 即是否可能将两种嵌入方式结合起来同时抑制横纵两种形式的振动? 为了验证该设想, 我们提出了两种不同的嵌入式微结构排布方式, 即如图6(a)和(b)所示的段排列和间隔排列. 图6(c)和(d)分别展示了基体结构、不同嵌入微结构的分段排列和间隔排列的实验测量结果(FRF\_Y和FRF\_X). 由图6(c)可见, 分段排列和间隔排列的FRF\_Y在理论预测的禁带范围(青色阴影区域)都有一个明显的谷, 很好地抑制了基体结构的第三阶共振峰, 其中分段排列的降幅更大, 振动抑制效果更好. 由图6(d)可发现, 两种排布方式的FRF\_X在禁带范围也有明显的降低, 且降幅几乎一致. 这说明, 有策略地排布90°和0°

这两种嵌入微结构, 能够同时达到横向和纵向振动的抑制效果, 且分段排列方式的效果相对更优. 此外, 在嵌入30个谐振微结构后, 整体结构的重量仅增加了约10%, 可成功保持原基体结构的轻质优点. 由上述研究可证明, 嵌入式超结构可以在保持基体结构轻质优势与静力学强度的同时, 有效隔离目标低频振动.

### 3 低频隔振轻质超结构梁

#### 3.1 谐振微结构的几何形状优化

在工程应用中, 轻质结构常常面临200 Hz以下的低频振动问题, 上述超结构的隔振频率范围仍然偏高. 考虑到超结构禁带下界主要由嵌入的谐振微结构的质量和刚度共同决定, 我们决定采用降低微结构刚度的方式, 在保持整体结构轻质的同时实现更低频的抑振. 此前, Inman课题组<sup>[20,21]</sup>曾通过曲折形设计降低谐振微结构的出面弯曲刚度. 受该研究启发, 我们首先将原谐振微结构中的直梁改为折梁以降低其面内弯曲刚度, 如图7(a)所示. 利用图7(b)的两端固支边界条件, 可定性比较两种梁的等效刚度. 直梁的等效刚度为

$$k_{\text{eff}} = \frac{24EI}{b_2^3}. \quad (5)$$

根据莫尔定理, 折梁的等效刚度为

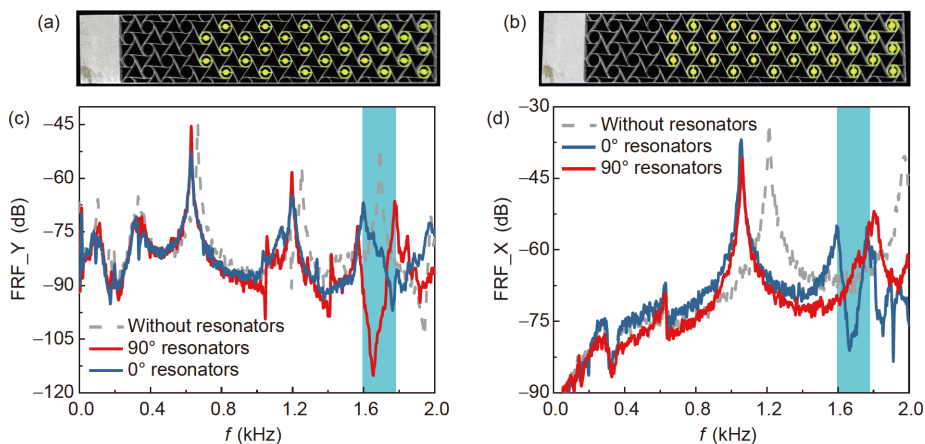


图 5 (网络版彩图) (a) 90°嵌入微结构的超结构; (b) 0°嵌入微结构的超结构; (c) 手性蜂巢基体结构、90°嵌入超结构和0°嵌入超结构受竖直方向激励的FRF\_Y实验结果; (d) 手性蜂巢基体结构、90°嵌入超结构和0°嵌入超结构受水平激励的FRF\_X实验结果

Figure 5 (Color online) The metastructure with 90° embedded resonators (a) and 0° embedded resonators (b); (c) the FRF\_Y results of the chiral honeycomb base structure, the metastructure with 90° embedded resonators and 0° embedded resonators under vertical excitation; (d) the FRF\_X results of the chiral honeycomb base structure, the metastructure with 0° embedded resonators and 90° embedded resonators under horizontal excitation.

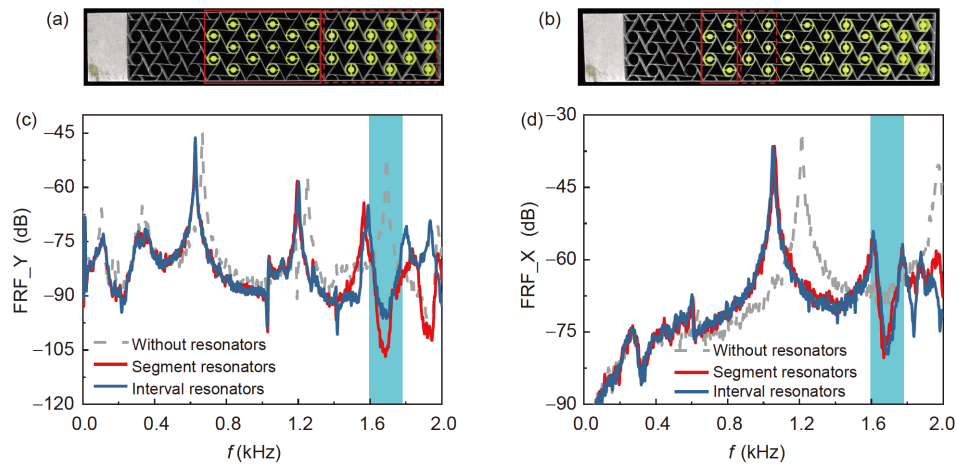


图 6 (网络版彩图) (a) 分段排列微结构的超结构; (b) 间隔排列微结构的超结构; (c) 手性蜂巢基体结构、分段排列超结构和间隔排列超结构受竖直激励的FRF\_Y实验结果; (d) 手性蜂巢基体结构、分段排列超结构和间隔排列超结构受水平激励的FRF\_X实验结果

**Figure 6** (Color online) The metastructure with segment-arrangement resonators (a) and interval-arrangement resonators (b); (c) the FRF\_Y results of the chiral honeycomb base structure, the metastructure with segment-arrangement resonators and interval-arrangement resonators under vertical excitation; (d) the FRF\_X results of the chiral honeycomb base structure, the metastructure with segment-arrangement resonators and interval-arrangement resonators under horizontal excitation.

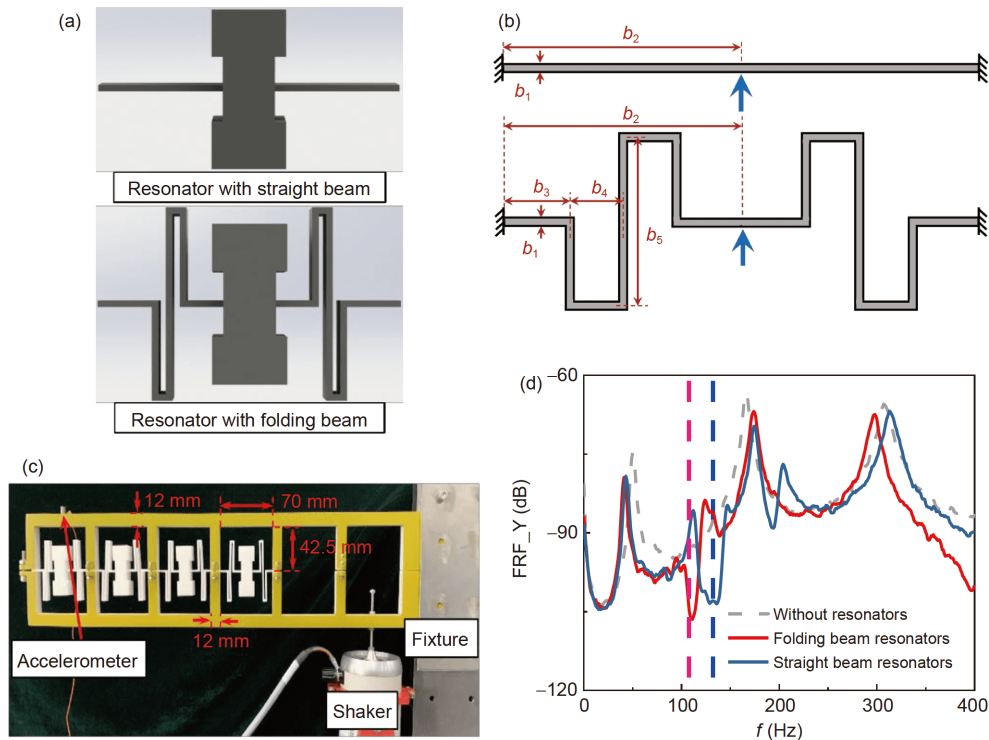


图 7 (网络版彩图) (a) 直梁/折梁谐振微结构模型; (b) 超静定直梁/折梁模型; (c) 超结构梁振动实验平台; (d) 方形栅格基体结构、嵌入直梁微结构的超结构和嵌入折梁微结构的超结构受竖直激励的FRF\_Y实验结果

**Figure 7** (Color online) (a) Statically indeterminate straight/folding beam model; (b) resonator with straight/folding beam; (c) experimental set-up for the vibration testing of the metastructure beam; (d) the FRF\_Y results of the lattice base structure, the metastructure with folding beam resonators and with straight beam resonators under vertical excitation.



$$k_{\text{eff2}} = \frac{EI}{\Delta}, \quad (6)$$

其中,

$$\Delta = \frac{1}{3}(b_3^3 + b_4^3) + b_3^2 b_4 + b_3 b_4^2 + \frac{1}{2} b_4^2 b_5.$$

代入表3中两种梁的几何参数, 直梁和折梁对应的谐振微结构的等效刚度分别为 $k_{\text{eff1}}=12.5 \text{ kN/m}$ 和 $k_{\text{eff2}}=8.3 \text{ kN/m}$ , 后者比前者低33.6%. 考虑到微结构的等效质量为18.1 g, 则两种微结构对应的谐振频率分别为 $f_1=132 \text{ Hz}$ 和 $f_2=108 \text{ Hz}$ . 因此, 微结构的共振频率, 同时也是超结构禁带的下界频率, 降低了18.6%.

为了验证上述设计, 利用光敏树脂通过3D打印工艺制备了方形栅格基体梁和两种微结构, 光敏树脂的材料参数如表3所示. 方形栅格基体梁包括6个单胞, 分为上下两半打印, 通过螺丝固定, 如图7(c)所示. 超结构梁则通过在栅格基体嵌入4个谐振微结构组成. 在实验测量方面, 利用LDS LPA100功率放大器连接LDS V201激振器作为振源, 在梁的右下端进行激励. 超结构梁的响应则通过粘贴在左上角的加速度传感器进行采集. 图7(d)显示了实验测量结果. 其中, 灰色虚线、蓝色实线和红色实线分别展示了方形基体梁、嵌入直梁微结构的超结构梁和嵌入折梁微结构的超结构梁的FRF\_Y实验结果. 为了和理论计算进行对比, 两种超结构的禁带下界分别用蓝色虚线和红色虚线标记. 可以看出, 两种超结构梁的FRF\_Y在对应的禁带下界附近都出现了明显的谷, 且对比基体梁结果均降低了约15 dB. 实验测得含折梁微结构的超结构梁抑振频率范围与其理论计算禁带吻合很好, 而含直梁微结构的超结构梁隔振频率下界略低于其理论计算的结果, 这主要是由打印和组装误差造成的. 上述研究表明, 改进微结构的几何构型可以降低谐振微结构的等效刚度,

并在几乎不增加质量的情况下有效降低了隔振频率范围.

更进一步看, 这种降低微结构等效刚度的方法还有不足. 首先, 该设计虽然能够降低微结构面内竖直方向的等效刚度, 但是同时也会降低微结构面内水平方向和面外方向的等效刚度. 这导致微结构在三个方向的等效刚度差异变小, 因而难以精确控制不同的振动形式. 其次, 该方法仍要为微结构自重提供足够的支撑, 因此很难进一步降低微结构的等效刚度. 为了改进上述不足并进一步降低超结构的抑振频率, 以下讨论引入准零刚度结构来设计低频隔振超结构梁.

### 3.2 准零刚度嵌入式微结构设计

通过将两根斜弹簧构成的负刚度元件并联一根竖直弹簧构成的正刚度元件, Carrella等人<sup>[24]</sup>发现结构的等效刚度可以接近零, 即等效准零刚度. Qiu等人<sup>[34]</sup>系统地研究了正弦形状的欧拉梁受到横向压缩时的力学行为. 基于他们的研究, 我们发现如图8(a)所示的两端固定的正弦曲梁经过受控屈曲能够实现准零刚度甚至负刚度. 该曲梁的几何参数如表4所示, 其中几何参数 $Q=l_3/l_2$ 决定曲梁在受横向压缩过程中是否会失稳. 通过调节 $Q$ , 可发现曲梁在接近一阶失稳模态时会出现准零刚度, 在发生失稳时会出现负刚度.

通过对设计的光敏树脂曲梁( $Q=1.75$ )进行有限元非线性静力学仿真, 可以得到曲梁受横向压缩时的力-位移和切线刚度-位移关系, 分别如图8(c)和(d)中的蓝色实线所示. 由图8(d)可见, 曲梁的刚度恒正, 因此梁在压缩过程中保持稳定. 在A点之前, 曲梁受压缩而导致切线刚度减小; 在A点之后, 曲梁压缩导致切线刚度增大. 而在A点附近, 曲梁的刚度非常接近于完全消失时表现出的准零刚度, 可称为直接准零刚度. 图8(a)展示了直接准零刚度曲梁被压缩 $l_3$ 后的变形图.

通过调整曲梁的几何参数( $Q=3.75$ ), 可以得到较宽范围的负刚度. 图8(c)和(d)中的红线分别展示了利用有限元计算得到的负刚度曲梁力-位移曲线和切线刚度-位移曲线. 由图8(d)可见, B点和C点的刚度虽然为零, 但都对应不稳定状态. 并且, B和C之间的区域是宽范围的失稳区, 失稳区内的刚度小于0, 且大约为一个常数( $-7 \text{ kN/m}$ ). 图8(a)展示了负刚度曲梁被压缩 $l_3$ 时的变形图, 表明曲梁发生三阶屈曲变形, 因此表现出很强的非线性. 为了验证这种负刚度现象, 我们用

表 3 直梁和折梁的几何参数

Table 3 The geometrical parameters of the straight beam and folding beam

| 几何参数              | 数值 | 材料参数                       | 数值   |
|-------------------|----|----------------------------|------|
| 直梁厚度 $b_1$ (mm)   | 2  | 树脂密度( $\text{kg m}^{-3}$ ) | 1160 |
| 半边直梁长度 $b_2$ (mm) | 28 | 树脂杨氏模量(MPa)                | 1715 |
| 直梁/折梁宽度 $t$ (mm)  | 10 |                            |      |
| 折梁折边长度 $b_3$ (mm) | 10 |                            |      |
| 折梁折边长度 $b_4$ (mm) | 4  |                            |      |
| 折梁折边长度 $b_5$ (mm) | 58 |                            |      |

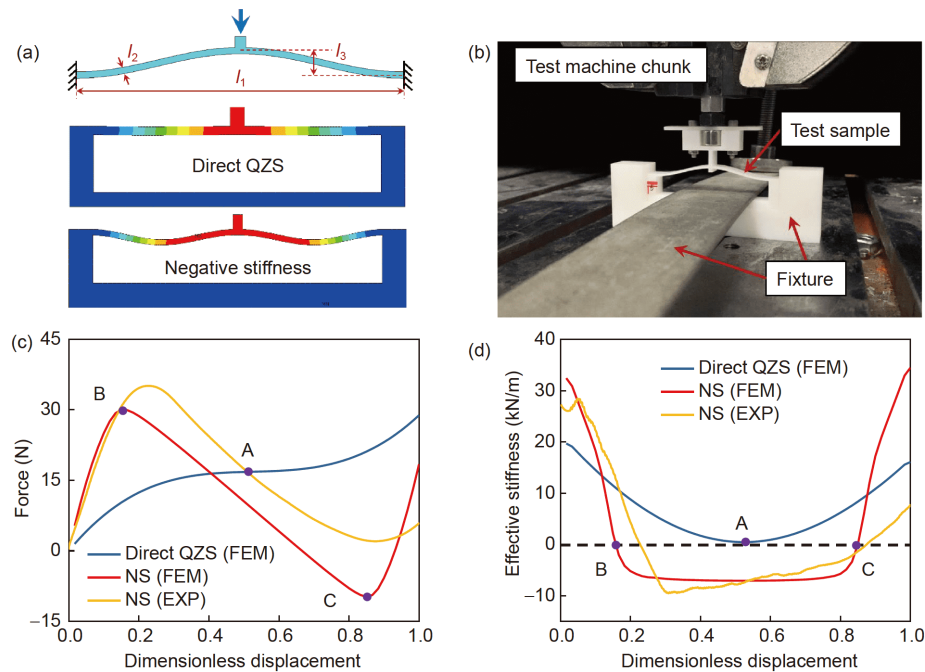


图 8 (网络版彩图) (a) 正弦形状曲梁模型、直接准零刚度曲梁变形图和负刚度曲梁变形图; (b) 负刚度曲梁静力学实验平台; 直接准零刚度曲梁和负刚度曲梁的力-位移曲线(c)与等效刚度-位移曲线(d)

**Figure 8** (Color online) (a) Sinusoidal curved beam and the deformation of direct QZS curved beam and negative stiffness curved beam; (b) negative stiffness curved beam static experimental set-up; (c) force-dimensionless displacement and (d) effective stiffness-dimensionless displacement relationship of curved beam with direct QZS and negative stiffness.

表 4 正弦曲梁的几何参数

**Table 4** Geometric parameters of the sinusoidal curved beam

| 正弦曲梁类型               | 跨度 $l_1$ (mm) | 厚度 $l_2$ (mm) | 跨高 $l_3$ (mm) | 宽度 $l_4$ (mm) |
|----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 直接准零刚度曲梁( $Q=1.75$ ) | 60            | 1.8           | 2.1           | 10            |
| 负刚度曲梁( $Q=3.75$ )    | 60            | 1.2           | 4.5           | 10            |

光敏树脂通过3D打印制备了一个测试样件, 并用WDLY-5万能力学试验机进行静力学实验, 如图8(b)所示. 为了模拟两端固定约束的边界条件, 将测试样件嵌入一个凹槽内, 并用钢条将样件压在试验机平台上. 试验机夹头内的力传感器可以测量出曲梁压缩过程中的反力. 图8(c)和(d)中的黄线分别表示样件经实验测得的力-位移关系及等效刚度-位移关系. 如图8(c)表明, 实验测得的力-位移关系在线性段与有限元计算结果(红线)几乎重合, 但实验测得的最大反力大于有限元计算结果, 这主要是因为实验中边界条件并非理想的固定约束条件. 在进入失稳区后, 实验测得的负刚度与有限元计算结果略有差别, 这主要是由打印过程中的误差与缺陷导致的. 这种将负刚度曲梁与正刚度元

件组合形成的准零刚度, 可称为组合准零刚度.

首先, 我们使用直接准零刚度曲梁( $Q=1.75$ )开展低频隔振微结构设计. 如图9(a)所示, 用两根曲梁和一个质量为22 g的方形质量块组成谐振微结构, 并用光敏树脂进行了3D打印制备. 为了验证该微结构的等效刚度在压缩前后是否发生变化, 搭建了如图9(b)所示的振动实验平台来测量微结构样件的共振频率. 在实验中, 谐振微结构样件被嵌入到约束外框中, 后者则固定在LDS V406激振器上. 约束外框分为上下两部分, 并通过两根螺丝连接. 螺丝可以调节约束外框之间的距离, 从而对直接准零刚度微结构的压缩量进行控制. 利用激振器发出的白噪声作为激励, 用粘贴在谐振微结构中心孔中的加速度传感器测量微结构的一

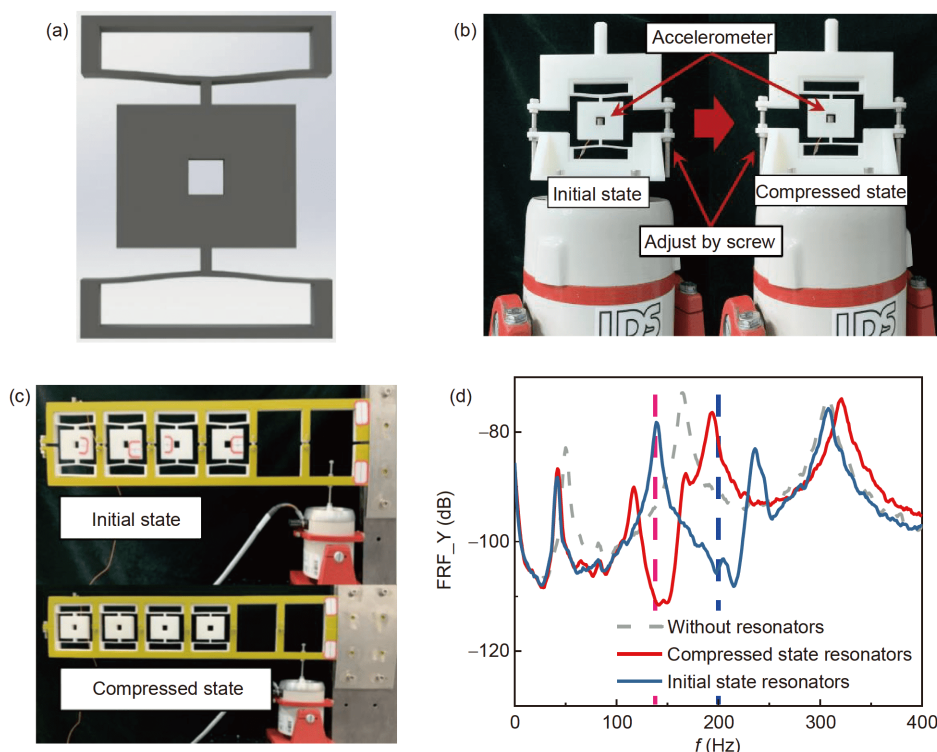


图 9 (网络版彩图) (a) 直接准零刚度谐振微结构模型; (b) 准零刚度微结构振动实验平台; (c) 超结构梁振动实验平台; (d) 栅格基体结构、嵌入初始状态微结构的超结构梁和嵌入压缩状态微结构的超结构梁受竖直激励的FRF\_Y实验结果

**Figure 9** (Color online) (a) The resonator with direct QZS structures; (b) experimental set-up for measuring resonance frequency of QZS resonators; (c) experimental set-up for the vibration testing of the metastructure beam; (d) the FRF\_Y results of the lattice base structure, the metastructure beam with compressed state resonators and initial state resonators under vertical excitation.

阶共振频率。通过将原始长度的谐振微结构微压 0.5 mm 作为初始状态(确保微结构被固定在约束外框中),测得微结构的一阶共振频率为 200 Hz。接着,将原始长度的谐振微结构压缩 4.2 mm 作为压缩状态,测得微结构的共振频率为 138 Hz。利用实验测得共振频率,可以计算出初始状态和压缩状态对应的单根曲梁的刚度分别为 17.4 和 8.3 kN/m。对比有限元仿真计算结果, 16.7 和 0.5 kN/m,我们发现,实验测得的初始状态单根曲梁的刚度与有限元计算结果基本一致,但压缩状态的刚度与有限元计算结果差距较大。后者的偏差主要来自实验中压缩状态并非完美的固定边界条件,但通过压缩来降低谐振微结构共振频率以及等效刚度的效果仍很明显,微结构的共振频率降低了 31%,等效刚度降低了 52%。

接着,我们将 4 个直接准零刚度微结构与方形栅格基体组成超结构,并测试其低频隔振效果,如图 9(c) 所示。图 9(d) 中的灰色虚线、蓝色实线和红色实线分别

表示实验测得的方形栅格基体结构,含初始状态嵌入微结构的超结构以及含压缩状态嵌入微结构的超结构的 FRF\_Y。其中,红色和蓝色虚线分别表示实验测得的初始状态微结构和压缩状态微结构的一阶共振频率,同时也是对应超结构禁带的下界。在相应禁带下界附近可以发现,两种超结构梁的 FRF\_Y 对比基体结构的 FRF\_Y 都有一个明显的谷,即降低了约 20 dB。这说明直接准零刚度设计能有效地减少微结构的等效刚度,产生低频禁带,从而实现所需的低频隔振。

为了获得更宽的准零刚度区域,我们采用组合准零刚度设计,并进行有限元分析。当曲梁的几何参数如表 4 ( $Q=3.75$ ) 所示时,曲梁会产生较大范围的负刚度区域,且负刚度的值约为常数 ( $-7$  kN/m)。当曲梁在负刚度区域时,只需并联一个刚度略大于  $-7$  kN/m 的正刚度元件,即可实现组合准零刚度。为此,设计了口字形的正刚度元件与产生负刚度的正弦曲梁形成组合准零刚度结构,如图 10(a) 所示,其中口字形直梁的厚度

$l_4=4$  mm, 长度 $l_5=58$  mm, 正刚度元件与微结构内底面的距离为 $ld=4.9$  mm. 通过有限元计算可知, 正刚度元件中直梁的等效刚度为9 kN/m. 在有限元建模中, 正刚度元件的底部与微结构内底面均设置为接触单元, 微结构的左右两边及底面都固定, 上端施加位移约束. 图10(c)和(d)中的红线/蓝线分别表示有限元计算得到

的组合准零刚度微结构与负刚度曲梁的力-位移关系与等效刚度-位移关系. 由图10(c)可发现, 组合准零刚度微结构在B点之前的力学行为与负刚度曲梁相同. 此时, 正刚度元件尚未接触到底部, 因此只有负刚度曲梁起作用. 在D点处, 组合准零刚度微结构的力-位移曲线发生了突变, 切线刚度从负值突变为正值, 并在之后

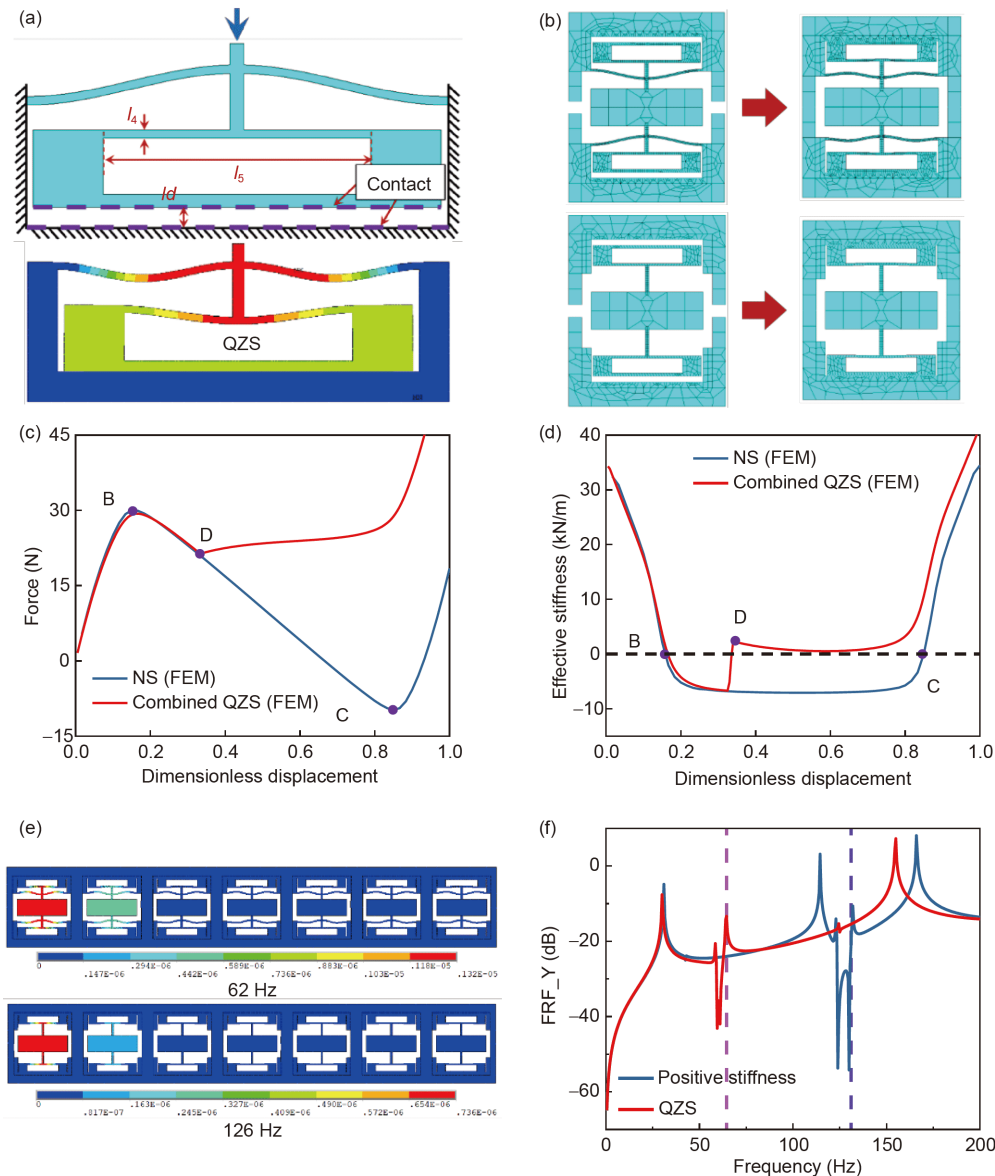


图 10 (网络版彩图) (a) 组合准零刚度结构及其变形图; (b) 组合准零刚度微结构及正刚度微结构有限元模型; 组合准零刚度结构和负刚度曲梁的力-位移关系(c)及等效刚度-位移关系(d); (e) 嵌入组合准零刚度微结构的超结构梁在62 Hz时的变形图和嵌入正刚度微结构的超结构的超结构梁在126 Hz时的变形图; (f) 嵌入组合准零刚度的超结构的超结构的FRF\_Y仿真结果

**Figure 10** (Color online) (a) The combined QZS structure and its deformation; (b) the resonator with combined QZS and positive stiffness; force-dimensionless displacement (c) and effective stiffness-dimensionless displacement (d) relationship of curved beam with combined QZS and negative stiffness; (e) deformation of the metastructure with combined QZS at 62 Hz and with positive stiffness at 126 Hz; (f) the FRF\_Y of the metastructure beam with combined QZS and with positive stiffness.



发生了负刚度与正刚度的线性叠加. 这是由于在 $D$ 点之后, 正刚度元件接触了底部, 并开始在组合准零刚度微结构中发挥作用. 图10(a)展示了组合准零刚度微结构被压缩 $I_3$ 时的变形图, 此时正刚度元件恰好接触到底部. 我们称刚度值小于 $D$ 点的稳态区域为准零刚度区, 其中准零刚度结构的等效刚度为0.5–2.3 kN/m, 远小于没有负刚度曲梁削弱的正刚度元件. 需要注意的是, 在组合准零刚度微结构的非线性静力学分析中, 由于正刚度元件的底面会与微结构底部边界发生水平滑移, 直梁的刚度改变不大, 因此这种组合准零刚度微结构具有较宽的准零刚度范围.

最后, 利用组合准零刚度微结构和一个27.8 g的方形质量块, 我们设计了谐振微结构. 图10(b)展示了该微结构压缩前后的有限元模型. 经非线性静力学计算可知, 当准零刚度微结构被压缩6.6 mm(略大于 $2lb$ 以确保正刚度直梁起作用)时, 其竖直方向等效刚度为4.2 kN/m, 此时上下两部分外框相接触. 进行重启动分析, 可计算出此时单胞的一阶共振频率为62 Hz. 该仿真过程模拟了将准零刚度微结构嵌入方形栅格基体中, 并通过装配应力将其调整到所需要状态的过程. 利用没有经过负刚度曲梁削弱的直梁, 设计了对照微结构, 如图10(b)下方所示. 经有限元计算, 可得对照微结构的一阶共振频率是130 Hz. 可以发现, 经负刚度曲梁削弱后, 组合准零刚度微结构比对照微结构的等效刚度降低74.7%, 共振频率降低53.3%. 通过建立含7个胞元的超结构梁有限元模型, 验证了其低频隔振效果. 超结构梁有限元模型的左端固定, 离开左端的第一个胞元的下端节点处施加竖直方向力激励. 通过提取梁右上端的竖直方向加速度, 可以得到竖直方向的频率响

应函数FRF\_Y. 图10(f)中的红色实线和蓝色实线分别表示准零刚度超结构梁和对照超结构梁的FRF\_Y, 红色虚线和蓝色虚线则分别表示两种超结构单胞的一阶共振频率, 同时也是它们的禁带下界. 可以看出, 两种超结构的响应在相应禁带下界处都有迅速降低, 并且降幅都超过20 dB. 图10(e)展示了激励频率为62和126 Hz时准零刚度超结构和对照超结构的变形. 由图可见, 变形主要集中在第一个微结构的谐振运动中. 这说明大部分能量被第一个单胞吸收, 无法传递出去. 有限元仿真结果证明, 组合准零刚度结构可以有效地降低微结构的等效刚度, 从而在几乎不增加质量的前提下将禁带频率范围降低50%, 但是组合准零刚度结构相对较为复杂, 且依赖高阶屈曲模态获得负刚度, 所以对于制造和装配误差很敏感. 因此, 未来研究将聚焦于组合准零刚度超结构的相关实验.

## 4 结论

本研究通过对手性蜂巢栅格梁进行嵌入式谐振微结构设计, 得到了一种可以实现低频振动抑制的轻质超结构. 首先, 通过对嵌有谐振微结构的单胞进行带结构分析, 得到了超结构的单一极化禁带. 然后, 制备了嵌入式超结构梁样件, 并用实验验证了其对于单一形式振动的抑制效果. 为了抑制多种形式的振动, 研究了间隔排列和分段排列两种微结构排布方式, 并实验验证了其效果. 最后, 为了降低抑振频率同时保持结构的轻质特性, 提出了几何优化和准零刚度两种嵌入式微结构设计方法, 并从数值和实验上验证了对应超结构的低频隔振效果.

## 参考文献

- 1 Baravelli E, Ruzzene M. Internally resonating lattices for bandgap generation and low-frequency vibration control. *J Sound Vib*, 2013, 332: 6562–6579
- 2 Spadoni A, Ruzzene M. Elasto-static micropolar behavior of a chiral auxetic lattice. *J Mech Phys Solids*, 2012, 60: 156–171
- 3 Liu X N, Huang G L, Hu G K. Chiral effect in plane isotropic micropolar elasticity and its application to chiral lattices. *J Mech Phys Solids*, 2012, 60: 1907–1921, arXiv: 1203.4314
- 4 Bauer J, Schroer A, Schwaiger R, et al. Approaching theoretical strength in glassy carbon nanolattices. *Nat Mater*, 2016, 15: 438–443
- 5 Zhou X M, Zhao Y C. Unusual one-way edge state in acoustic gyroscopic continuum. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2018, 62: 14612–14618
- 6 Liu Z, Zhang X, Mao Y, et al. Locally resonant sonic materials. *Science*, 2000, 289: 1734–1736
- 7 Sheng P, Zhang X X, Liu Z, et al. Locally resonant sonic materials. *Phys B-Condensed Matter*, 2003, 338: 201–205
- 8 Yao S, Zhou X, Hu G. Experimental study on negative effective mass in a 1D mass-spring system. *New J Phys*, 2008, 10: 043020

- 9 Huang H H, Sun C T, Huang G L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. *Int J Eng Sci*, 2009, 47: 610–617
- 10 Yu D, Liu Y, Wang G, et al. Flexural vibration band gaps in Timoshenko beams with locally resonant structures. *J Appl Phys*, 2006, 100: 124901
- 11 Yu D, Wen J, Shen H, et al. Propagation of flexural wave in periodic beam on elastic foundations. *Phys Lett A*, 2012, 376: 626–630
- 12 Nateghi A, Sangiuliano L, Claeys C, et al. Design and experimental validation of a metamaterial solution for improved noise and vibration behavior of pipes. *J Sound Vib*, 2019, 455: 96–117
- 13 Zhu R, Huang G L, Huang H H, et al. Experimental and numerical study of guided wave propagation in a thin metamaterial plate. *Phys Lett A*, 2011, 375: 2863–2867
- 14 Qureshi A, Li B, Tan K T. Numerical investigation of band gaps in 3D printed cantilever-in-mass metamaterials. *Sci Rep*, 2016, 6: 28314
- 15 Li Y, Baker E, Reissman T, et al. Design of mechanical metamaterials for simultaneous vibration isolation and energy harvesting. *Appl Phys Lett*, 2017, 111: 251903
- 16 Chen J S, Sharma B, Sun C T. Dynamic behaviour of sandwich structure containing spring-mass resonators. *Composite Struct*, 2011, 93: 2120–2125
- 17 Yu T, Lesieutre G A. Damping of sandwich panels via three-dimensional manufactured multimode metamaterial core. *AIAA J*, 2017, 55: 1440–1449
- 18 Ma G, Fu C, Wang G, et al. Polarization bandgaps and fluid-like elasticity in fully solid elastic metamaterials. *Nat Commun*, 2016, 7: 13536
- 19 Zhu R, Liu X N, Hu G K, et al. A chiral elastic metamaterial beam for broadband vibration suppression. *J Sound Vib*, 2014, 333: 2759–2773
- 20 Abdeljaber O, Avci O, Kiranyaz S, et al. Optimization of linear zigzag insert metastructures for low-frequency vibration attenuation using genetic algorithms. *Mech Syst Signal Processing*, 2017, 84: 625–641
- 21 Liao W H, Hobeck J D, Inman D J. Magnetoelastic metastructures for passive broadband vibration suppression. In: *Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems 2015*. San Diego, 2015
- 22 Bilal O R, Hussein M I. Trampoline metamaterial: Local resonance enhancement by springboards. *Appl Phys Lett*, 2013, 103: 111901, arXiv: 1305.6584
- 23 Bilal O R, Foehr A, Daraio C. Observation of trampoline phenomena in 3D-printed metamaterial plates. *Extreme Mech Lett*, 2017, 15: 103–107
- 24 Carrella A, Brennan M J, Waters T P. Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic. *J Sound Vib*, 2007, 301: 678–689
- 25 Xu D, Yu Q, Zhou J, et al. Theoretical and experimental analyses of a nonlinear magnetic vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic. *J Sound Vib*, 2013, 332: 3377–3389
- 26 Zhou J, Wang X, Xu D, et al. Nonlinear dynamic characteristics of a quasi-zero stiffness vibration isolator with cam-roller-spring mechanisms. *J Sound Vib*, 2015, 346: 53–69
- 27 Li H, Wu Z, Jiang T. A quasi-zero stiffness vibration isolator based on hybrid bistable composite laminate. In: *Proceedings of AIAA SciTech 2019 Forum*. San Diego, 2019
- 28 Fulcher B A, Shahan D W, Haberman M R, et al. Analytical and experimental investigation of buckled beams as negative stiffness elements for passive vibration and shock isolation systems. *J Vib Acoustics*, 2014, 136
- 29 Zhou J, Wang K, Xu D, et al. Multi-low-frequency flexural wave attenuation in Euler-Bernoulli beams using local resonators containing negative-stiffness mechanisms. *Phys Lett A*, 2017, 381: 3141–3148
- 30 Zhou J, Wang K, Xu D, et al. Local resonator with high-static-low-dynamic stiffness for lowering band gaps of flexural wave in beams. *J Appl Phys*, 2017, 121: 044902
- 31 Zhou J, Dou L, Wang K, et al. A nonlinear resonator with inertial amplification for very low-frequency flexural wave attenuations in beams. *Nonlinear Dyn*, 2019, 96: 647–665
- 32 Liu X N, Hu G K, Sun C T, et al. Wave propagation characterization and design of two-dimensional elastic chiral metacomposite. *J Sound Vib*, 2011, 330: 2536–2553
- 33 Sun C, Kim B, Bogdanoff J. On the derivation of equivalent simple models for beam- and plate-like structures in dynamic analysis. In: *Dynamics Specialists Conference*. West Lafayette, 1981
- 34 Qiu J, Lang J H, Slocum A H. A curved-beam bistable mechanism. *J Microelectromech Syst*, 2004, 13: 137–146

# Isolating low-frequency vibration via lightweight embedded metastructures

ZHAO WeiJia, WANG YiTian, ZHU Rui<sup>\*</sup>, HU GengKai & HU HaiYan

*Department of Mechanics, School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*

Load-bearing lightweight structures, such as lattice structures, are commonly used in various engineering fields, but often suffer from environmental low-frequency vibration which is difficult to suppress. The emerging field of metastructure offers a practical solution for the low-frequency vibration reduction without introducing extra isolators that have gigantic size and heavy weight. In this research, 3D printed subwavelength-scale microstructures are embedded into a honeycomb beam to form a lightweight metastructure which can suppress vibrations with different polarizations at targeted frequencies. Moreover, by simply rotating the fabricated resonators from the horizontal embedment into the vertical embedment, the bandgaps as well as the vibration isolations can be easily switched for different vibration sources. The multi-polarization vibration isolations have also been demonstrated with strategically positioned resonators following interval and segment arrangements. Finally, metastructures with geometrically optimized microstructures as well as quasi-zero dynamic stiffness microstructures are designed to achieve an even lower frequency isolation with unaltered lightweight advantages.

**metastructure, lightweight, quasi-zero stiffness, low frequency vibration isolation, polarization, 3D printing**

**PACS:** 43.40.+s, 46.32.+x, 46.40.-f, 46.70.-p, 46.90.+s

**doi:** [10.1360/SSPMA-2020-0153](https://engine.scichina.com/doi/10.1360/SSPMA-2020-0153)