

Mechanism-based metamaterials for low-frequency broadband wave control

王倚天^{1,2}, 赵建雷¹, 张铭凯¹, 朱睿¹ and 胡更开¹

Citation: [科学通报](#); doi: 10.1360/TB-2021-0518

View online: <https://engine.scichina.com/doi/10.1360/TB-2021-0518>

Published by the [《中国科学》杂志社](#)

Articles you may be interested in

[Viscoelastic multi-resonator mechanism for broadening low-frequency band-gap of acoustic metamaterials](#)

European Physical Journal AP(Applied Physics) **86**, 10901 (2019);

[Low-frequency sparse double-constrained broadband seismic impedance inversion](#)

Natural Gas Industry B **6**, 556 (2019);

[Low-frequency wide-band hybrid energy harvester based on piezoelectric and triboelectric mechanism](#)

SCIENCE CHINA Technological Sciences **56**, 1835 (2013);

[Resonant modal group theory of membrane-type acoustical metamaterials for low-frequency sound attenuation](#)

European Physical Journal AP(Applied Physics) **71**, 30504 (2015);

[Cloud and precipitation interference by strong low-frequency sound wave](#)

SCIENCE CHINA Technological Sciences **64**, 261 (2021);



含机构位移模式的超材料低频宽带波动控制

王倚天^{1,2†}, 赵建雷^{1†}, 张铭凯¹, 朱睿^{1*}, 胡更开¹

1. 北京理工大学宇航学院力学系, 北京 100081;

2. 北京空间飞行器总体设计部, 北京 100094

† 同等贡献

* 联系人, E-mail: ruiyu@bit.edu.cn

2021-05-30 收稿, 2021-08-05 修回, 2021-08-09 接受, 2021-08-10 网络版发表

国家自然科学基金(U1837602, 11872112, 11991033)和国家重点研发计划(2020YFF0304801)资助

摘要 基于谐振微结构的超材料普遍存在有效工作带宽狭窄和工作频率位置受谐振子质量控制的问题, 严重制约了弹性波超材料的应用推广。本文通过将机构位移模式引入超材料中, 设计了由圆盘连杆机构组成的机构超材料, 研究了其零频负刚度和双各向异性。通过同时引入机构位移模式和内部阻尼, 在不增加整体质量的前提下, 实现了局域谐振超材料的低频宽带振动控制。本文的研究探索了机构超材料中局部机构位移与整体超低频波动强耦合的机理, 为工程结构的宽低频波动与振动控制提供了理论基础与设计指导。

关键词 超材料, 低频抑振, 机构位移模式, 负等效刚度, 双各向异性

基于局域谐振机理的超材料凭借其亚波长尺寸的谐振微结构, 具有颠覆性的负动态等效属性, 为低频弹性波控制带来了新的方法。通过人工微结构的单极或/和偶极谐振, 超材料能分别具有负的等效体积模量^[1~3]或/和负的等效质量密度^[4~8], 并能够在谐振频率附近实现多种奇异弹性波控制, 如: 超低频阻隔波、负折射、超透镜以及非互易传播等^[9~16]。值得注意的是, 许多工程实际情况需要解决的低频波动问题都在一个较宽的频带内, 并且需要对附加质量有严格的限制。然而, 依赖谐振微结构的超材料普遍面临有效工作带宽狭窄和工作频率位置受谐振子质量控制的问题, 严重制约了弹性波超材料的应用推广。

2000年, Liu等人^[4]通过将橡胶包覆的小铅球周期性地嵌入环氧树脂基底内, 利用单胞的偶极谐振首次实现了具有负等效质量密度的弹性波超材料。发生偶极谐振的微结构可以通过简单的mass-in-mass力学模

型进行分析^[17], 后者能解析地给出等效质量密度的表达式。2006年, Fang等人^[1]设计了一种含有Helmholtz共振腔的超材料, 在共振频率载荷的作用下单胞可以发生单极谐振, 也就是共振腔的膨胀-收缩振动。此时施加于边界上的拉力使得超材料缩小, 因此宏观上表现为负的等效刚度。Liu等人^[18]巧妙地利用斜弹簧-质量圆盘力学模型, 解析地给出了能实现负等效刚度的单极谐振超材料的波动解。正是得益于上述力学模型的帮助, 弹性波超材料的研究有了蓬勃的发展^[19~22]。通过力学模型可以清楚地看到, 超材料通过局部软模式产生的局域谐振与材料中整体波动的耦合, 突破了质量定律限制, 实现了小尺度控制大波长的颠覆性低频波控。其中, 局域谐振频率不仅受控于谐振子的质量, 还与谐振子和基体的连接形式及连接刚度密切相关。这表明可以在微结构中引入机构型连接来代替原来的结构型连接, 通过机构位移模式, 即引入的内部机构

引用格式: 王倚天, 赵建雷, 张铭凯, 等. 含机构位移模式的超材料低频宽带波动控制. 科学通报, 2021, 66,

Wang Y T, Zhao J L, Zhang M K, et al. Mechanism-based metamaterials for low-frequency broadband wave control (in Chinese). Chin Sci Bull, 2021, 66, doi: 10.1360/TB-2021-0518

本身所具有的零势能变形模式，降低微结构中的连接刚度并丰富连接形式^[23,24]，从而在保持附加质量不变的情况下，降低谐振频率并产生新的局域谐振形式。所以，通过引入机构位移模式，探索增强局部微结构与材料整体超低频波动的耦合机理，进而提高超材料对低频波动的调控能力，是本工作研究的重点问题之一。

针对局域谐振超材料窄带的问题，目前通过被动方法拓宽超材料工作频率范围主要有两种方法。一种是通过将非线性效应引入超材料中，实现工作频率范围的拓宽。Fang等人^[25]设计了一维非线性弹簧质量超材料，其谐振单元弹簧为立方非线性弹簧，从理论上研究了其宽带波动响应，并对非线性弹簧质量超材料的隔振效果进行了实验验证^[26]。Cveticanin和Zukovic^[27]阐述了一种基于mass-in-mass的非线性超材料理论模型，发现其负质量以及禁带区域宽度相对线性mass-in-mass模型有显著增加。此种方式存在的不足是，非线性本身会降低系统的可靠性，带来实际使用的困难。另外一种方式是通过在超材料中引入含有阻尼多重谐振微结构，通过使耗散和谐振进行耦合，拓宽工作频率范围。Huang和Sun^[28]首先提出了含有两个谐振子的超材料，实现了内部谐振子的多级谐振，在多个亚波长频率段产生了禁带。Huang等人^[29]通过耦合多个弱共振吸声单体设计了一种具有亚波长厚度且可实现覆盖目标频段的宽频高效吸声体。Pai等人^[30]通过在梁单元中引入带有阻尼的双谐振子结构，使得多级谐振产生的多个亚波长频率禁带合并产生宽频禁带，实现了梁中完全波的宽频抑制。进而，Chen等人^[31]通过超阻尼的概念分析了将阻尼引入到上述多级谐振中产生宽频禁带的力学机理，并设计了对应的微结构，实现了宽频振动抑制。但是，此种多级谐振需要引入额外的谐振结构设计，使得设计的超材料更为复杂，不易制备，且附加质量大大增加，与工程上的轻质需求相悖。因此，探索将机构位移模式引入含阻尼的多级谐振微结构中，在不改变超结构质量与谐振刚度的同时，实现多级谐振，从而产生多个禁带，并且使禁带的下界频率降低，进而实现超结构对宽低频振动的抑制。这是本文研究的另外一个问题。

基于上述分析，本研究通过将机构位移模式引入超材料设计中，探索增强局部微结构与材料整体超低频波动强耦合的机理，进而提高超材料对超低频波传播以及宽低频振动的控制能力。

1 零频负刚度机构超材料

在图1(a)所示的机构超材料示意图中，虚线框中的单胞周期地沿着x轴排列。每个单胞由刚性圆盘、刚性连杆和弹簧构成。其中，圆盘边缘与刚性连杆通过铰接连接，构成圆盘连杆机构，圆盘中心则与相邻单胞中连杆左端用弹簧铰接相连。考虑到给定的圆盘质量远大于其他部件，本文忽略了除圆盘以外的其他质量。整个超材料的几何以及材料性质如表1所示。由于这里只分析超材料中的一维波动特性，圆盘中心和连杆最左侧的点只有沿着x方向的位移自由度，即 u_a 和 u_b 。

图1(a)中机构超材料的第n个圆盘的平动和转动的动力学控制方程为

$$\begin{cases} k(u_b^{n-1} + u_a^{n+1} - u_a^n - u_b^n) + m\ddot{u}_b^n = 0, \\ k(u_a^n - u_b^{n-1})R + J\Delta\ddot{\theta}_n = 0. \end{cases} \quad (1)$$

首先，根据几何关系并考虑相对运动为微小扰动时，可以将圆盘转动的角度和相对位移之间的关系简化为 $\Delta\theta = \Delta u / R$ 。接着，考虑该周期系统的Bloch形式的解， q 为波矢，而各单胞节点位移可以由参考单胞给出， $u_m^n = \tilde{u}_m e^{i(nqh - \omega t)}$ ，($m = a, b$)。代入后，由式(1)可得到如下特征值问题：

$$\begin{aligned} -\omega^2 & \begin{bmatrix} 0 & m \\ -\frac{J}{R^2} & \frac{J}{R^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_a \\ \tilde{u}_b \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k(e^{iqh} - 1) & k(e^{-iqh} - 1) \\ k & -k e^{-iqh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_a \\ \tilde{u}_b \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

通过求解式(2)的矩阵特征值问题，可以计算出结构中传播波的归一化波矢 qh 和圆频率 ω 之间的频散关系。对于每个频率点，分别计算了其对应波矢的实部和虚部，如图1(b), (c)所示。值得注意的是，禁带区域是从零频率开始出现的，并由图中的阴影区标记出来。在禁带区域内，对应波矢的实部恒为零，虚部不为零且最大值出现在零频位置。此外，波矢的虚部随频率的增大而减小，表明越低频的波在结构中衰减越快。

为了更好地理解上述波动特性，将含机构位移模式的超材料等效成简单的质量-弹簧系统，如图2(a)所示。通过计算，可以得到等效质量和等效弹簧刚度分别为

$$\begin{cases} m_{\text{eff}} = m_b, \\ k_{\text{eff}} = \frac{-kJ\omega^2}{kR^2 - J\omega^2}. \end{cases} \quad (3)$$

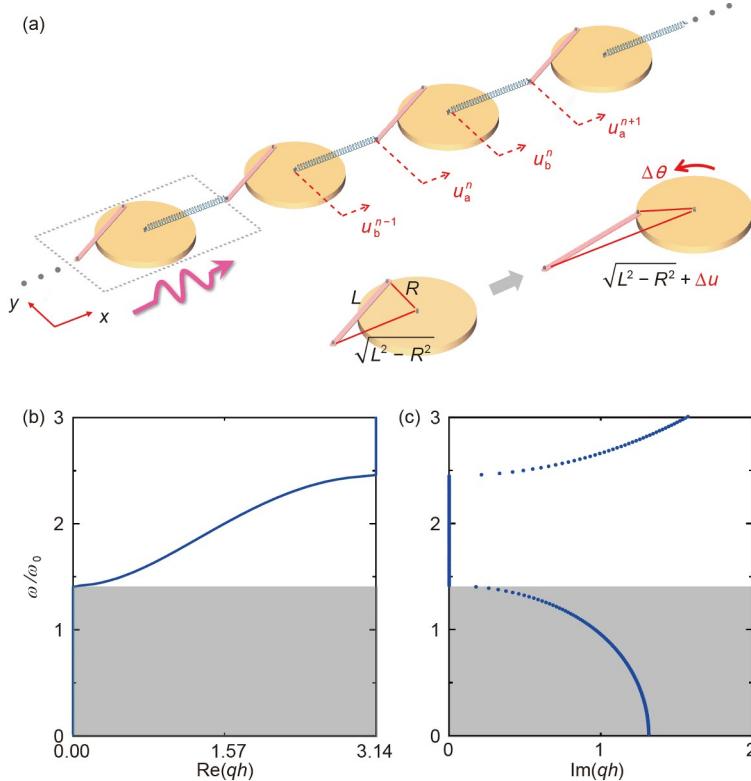


图 1 (网络版彩色)零频负刚度机构超材料的一维波动特性. (a) 机构超材料的示意图及圆盘连杆机构的运动模式; (b) 以波矢实部表示的频散曲线; (c) 以波矢虚部表示的频散曲线

Figure 1 (Color online) 1D wave properties of the mechanism-based metamaterial with zero-frequency negative stiffness. (a) Schematic diagram of the mechanism-based metamaterial and motions of the disc-linkage mechanism; (b) the dispersion curve represented by the real part of the wave vector; (c) the dispersion curve represented by the imaginary part of the wave vector

表 1 零频负刚度机构超材料的几何以及材料参数

Table 1 Geometry and material parameters of the mechanism-based metamaterial with zero-frequency negative stiffness

材料参数	几何参数
圆盘质量 \$m\$	圆盘半径 \$R\$
顶部圆盘转动惯量 \$J\$	\$6.0 \times 10^{-2} \text{ m}\$
弹簧刚度 \$k\$	胞元长度 \$h\$
	\$18.0 \times 10^{-2} \text{ m}\$
	连杆和水平方向夹角 \$\alpha\$
	\$\pi/6\$

图2(b)显示了等效性质和频率之间的关系. 其中, 频率、等效刚度和等效质量分别通过表达式 \$\omega/\omega_0\$、\$\omega_0 = \sqrt{k/m}\$、\$k_{\text{eff}}/k\$、\$m_{\text{eff}}/m\$ 进行无量纲化处理. 可以发现, 当频率趋近于零时, 等效刚度也趋近于零, 表明此种圆盘连杆机构超材料在零频即静载荷下不稳定. 这一结论与上文由圆盘转动角度和圆盘相对位移之间的关系得到的超材料含有零势能的机构位移模式相符合, 从侧面印证了上述等效方法的正确性. 进一步, 还可以从图2(b)中发现, 在阴影对应的频率范围内, 等效刚度

(实线)和等效质量(虚线)分别为负数和正常数, 并且此频率范围与图1(b), (c)中的禁带频率范围一致. 这说明该机构超材料的零频禁带是由单极谐振造成的, 即内部圆盘的旋转使圆盘连杆机构发生了反相位的膨胀-收缩振动, 阻止了弹性波的传播.

基于上述分析, 可以通过调节圆盘的转动惯量来改变单极谐振频率, 进而对禁带位置进行设计. 这里, 保持其他几何和材料参数与之前相同, 只调节表示圆盘转动惯量和质量之比的无量纲参数. 调节后的禁带

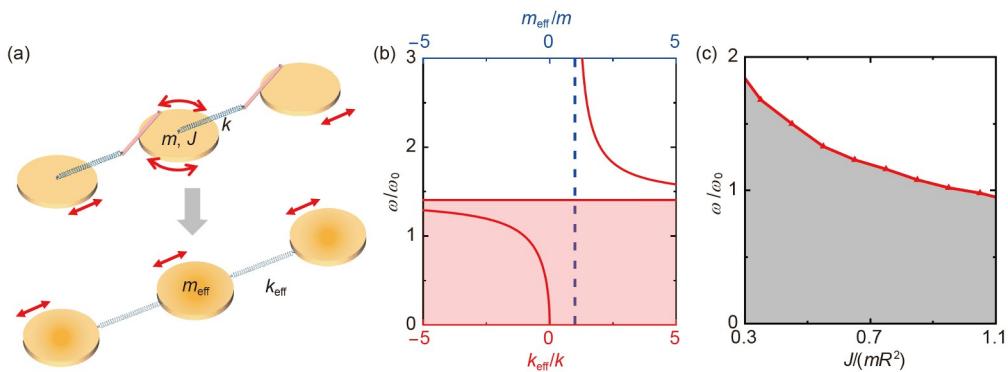


图2 (网络版彩色)零频负刚度的机构超材料等效性质. (a) 等效质量-弹簧-系统示意图; (b) 无量纲等效刚度及等效质量曲线; (c) 圆盘转动惯量和质量之比的无量纲参数对禁带范围影响

Figure 2 (Color online) Effective properties of the mechanism-based metamaterial with zero-frequency negative stiffness. (a) Schematic diagram of the equivalent mass-spring system; (b) the dimensionless effective stiffness and effective mass curves; (c) the influence of the dimensionless parameter of the ratio of the rotational inertia to the mass of the disc on the bandgap range

结果如图2(c)所示, 阴影区域代表禁带范围. 可以发现, 当圆盘转动惯量和质量之比减小时, 禁带上界对应增大, 禁带频率范围变宽. 也就是说, 当需要此种圆盘连杆机构超材料在保持质量不变的同时实现更宽频的阻波效果时, 可以设计其中圆盘的质量分布, 使其质量更多地向其中心分布, 以减小转动惯量.

2 双各向异性机构超材料

通过将上述机构超材料的零频负刚度特性推广到二维系统中, 设计了一种可以实现双各向异性, 即同时具有各向异性刚度和各向异性密度的机构超材料. 此种超材料可以在二维空间上实现从零频开始的方向性禁带, 在低频弹性波波导设计等领域存在潜在应用.

图3展示了基于零频负刚度单胞设计的双各向异性机构超材料. 该超材料由虚线框中的胞元周期性地排列而成, 且每个胞元中包含由2个相同刚性圆盘和1个刚性连杆组成的机构, 以及水平连接相邻单胞的2个刚度为 k_x 的弹簧和竖直连接的4个刚度为 k_y 的弹簧. 其中, 刚性圆盘的质量为 m , 转动惯量为 J , 半径均为 R , 长度为 L 的刚性连杆质量可以忽略, 采用铰接连接. 处在圆盘边缘的铰接点和圆盘中心的连线与水平方向夹角为 ϕ . 二维超材料具体的材料与几何参数如表2所示. 值得指出的是, 相较上述零频负刚度机构超材料中的圆盘连杆机构, 此处双圆盘连杆机构中的连杆并不会对圆盘施加 y 方向的力. 也就是说, 上述超材料在 x 方向产生运动的同时, 对 y 方向不产生力的作用, 因此可以很好地实现后文中的各向异性刚度.

当此超材料受到一个动态小扰动时, 第(n, n)个胞元中两圆盘分别发生 x 方向位移 u_a^n 和 u_b^n 及 y 方向位移 v_a^n 和 v_b^n . 通过构造控制方程并进行分析, 可得如下用于求解频散关系的特征值方程:

$$\begin{aligned} \omega^2 & \begin{bmatrix} m + \frac{J}{2R^2\sin(\phi)^2} & -\frac{J}{2R^2\sin(\phi)^2} & 0 & 0 \\ -\frac{J}{2R^2\sin(\phi)^2} & m + \frac{J}{2R^2\sin(\phi)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_a \\ \tilde{u}_b \\ \tilde{v}_a \\ \tilde{v}_b \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} k_x & k_x e^{-iq_x h_x} & 0 & 0 \\ k_x e^{iq_x h_x} & k_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_y (2 - e^{-iq_y h_y} - e^{iq_y h_y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_y (2 - e^{-iq_y h_y} - e^{iq_y h_y}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{u}_a \\ \tilde{u}_b \\ \tilde{v}_a \\ \tilde{v}_b \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

通过式(4)可以发现, x 方向的弹性波与 y 方向的弹性波没有耦合. 因此, 可以采用类似的等效方法得到二维超材料的等效质量与等效刚度分别为

$$\begin{cases} m_{\text{eff}x} = \frac{-2mR^2(2k_x - m\omega^2)\sin^2(\phi) + 2Jm\omega^2}{-2R^2(k_x - m\omega^2)\sin^2(\phi) + J\omega^2}, m_{\text{eff}y} = 2m, \\ k_{\text{eff}x} = \frac{Jk_x\omega^2}{-2R^2(k_x - m\omega^2)\sin^2(\phi) + J\omega^2}, k_{\text{eff}y} = 2k_y. \end{cases} \quad (5)$$

图4展示了二维超材料的等效质量与刚度的结果,虚线分别为 y 方向的等效质量与刚度,而实线分别为 x 方向的等效质量与刚度。可以发现,在无量纲频率(0, 0.61)范围内, y 方向的刚度为正值, x 方向的刚度为负

值,因此实现了各向异性的负刚度。此时,两个方向的等效质量都为正值。而在无量纲频率(0.61, 0.82)范围内, y 方向的等效质量为正值, x 方向的等效质量为负值;同时,两个方向的等效刚度都为正值。综上所述,

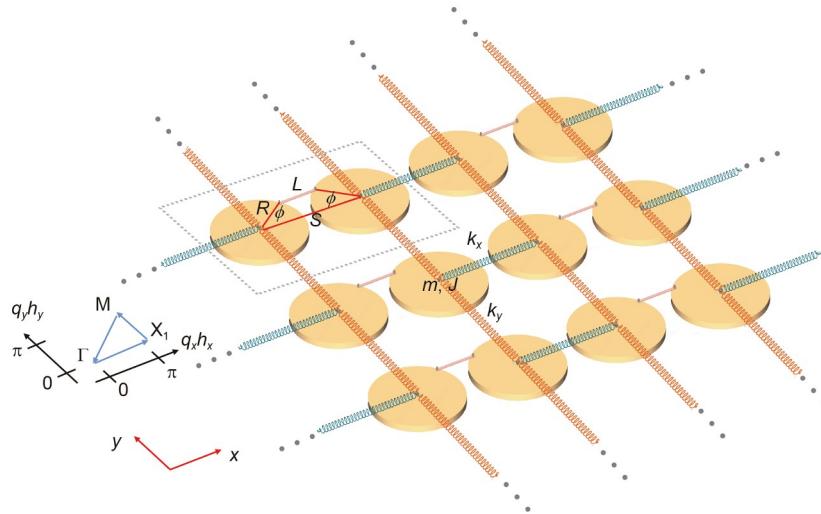


图3 (网络版彩色)双各向异性机构超材料示意图

Figure 3 (Color online) Schematic diagram of the bi-anisotropic mechanism-based metamaterial

表2 二维机构超材料的材料与几何参数

Table 2 Geometry and material parameters of the 2D mechanism-based metamaterial

材料参数	几何参数
圆盘质量 m	圆盘半径 R
圆盘转动惯量 J	6.0×10 ⁻² m
水平弹簧刚度 k_x	胞元水平长度 h_x
竖直弹簧刚度 k_y	3.6×10 ⁻¹ m
	胞元竖直长度 h_y
	1.8×10 ⁻¹ m
	圆心和铰点连线与水平夹角 ϕ
	$\pi/6$

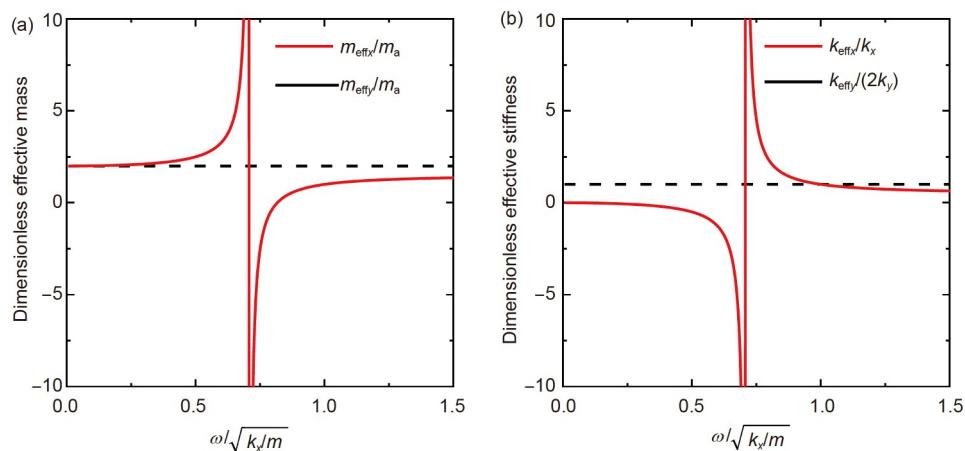


图4 (网络版彩色)双各向异性机构超材料。(a) 各向异性等效质量;

Figure 4 (Color online) The bi-anisotropic mechanism-based metamaterial. (a) Anisotropic effective mass; (b) anisotropic effective stiffness

此种二维超材料的设计，在无量纲频率0.61以下，实现了从零频开始的各向异性负刚度；同时，在无量纲频率(0, 0.82)范围内，可以产生对应x方向的方向性禁带，即只允许弹性波在y方向传播。

为了对设计的二维机构超材料双各向异性特性以及方向性禁带进行验证，利用等效之后的频散方程：

$$[k_{\text{eff}x}(e^{iqh_x} + e^{-iqh_x} - 2) + m_{\text{eff}x}\omega^2] \\ \times [k_{\text{eff}y}(e^{iqh_y} + e^{-iqh_y} - 2) + m_{\text{eff}y}\omega^2] = 0, \quad (6)$$

得到等效材料的频散曲线，并与由式(4)中的特征值问题求出的二维超材料频散曲线进行了比较，如图5所示。

图5中三角散点线是等效后材料的频散曲线，实线是二维超材料的频散曲线。首先，可以发现两者完全吻合，证明了等效结果的正确性，即此种二维超材料确实具有零频率的各向异性负刚度。其次，相比其他波矢区域，在波矢 Γ 与X1之间，无量纲频率(0, 0.82)范围内没有任何曲线，证明了此种二维超材料在对应的频率产生了x方向的方向性禁带。

3 局域谐振机构超材料的宽低频抑振分析

通过将含机构位移模式的微结构引入局域谐振型超材料，可以在不增加整体质量的同时实现超材料的低频多级谐振，并通过内部阻尼设计实现由谐振和耗

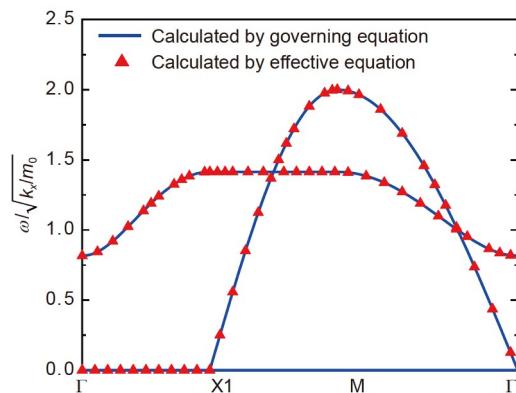


图5 (网络版彩色)双各向异性机构超材料频散曲线

Figure 5 (Color online) The dispersion curves of the bi-anisotropic mechanism-based metamaterial

散共同作用产生的宽低频禁带。如图6(a)所示，该超材料由虚线框中的胞元周期排列构成，每个胞元包含质量为 m_1 的外框，以及质量为 m_2 、转动惯量为 J_2 的圆盘和无质量连杆构成的内部谐振机构。连接相邻外框的弹簧刚度为 k_3 ，连接圆盘中心与外框的弹簧刚度为 k_2 。 c_1 、 c_r 和 c_3 分别代表谐振子和外框之间的平动阻尼系数、圆盘的转动阻尼系数以及外框之间的平动阻尼系数。图中圆盘中心和连杆两端的圆点代表在各个连接点均采取铰接的连接形式。与之前的一维超材料模型相似，规定外框、圆盘和连杆最左侧点只沿着水平方向运动。表3给出了该机构超材料模型的几何以及材料

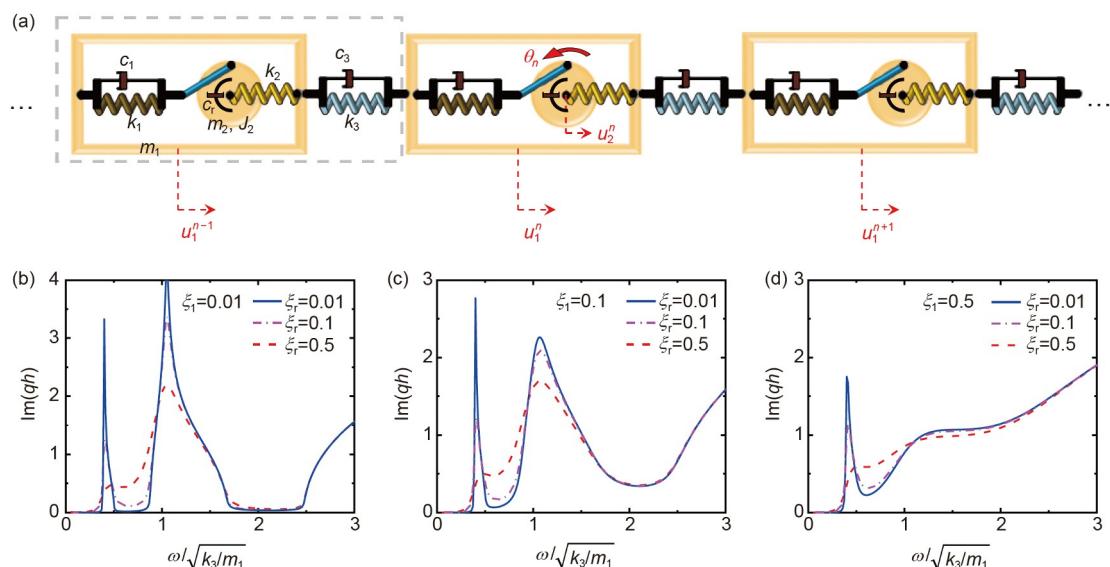


图6 (网络版彩色)引入机构位移模式和内部阻尼的局域谐振机构超材料。(a) 模型示意图；(b) $\zeta_1=0.01$ 时衰减因子曲线；(c) $\zeta_1=0.1$ 时衰减因子曲线；(d) $\zeta_1=0.5$ 时衰减因子曲线

Figure 6 (Color online) The locally resonant mechanism-based metamaterial with internal mechanism and internal damping. (a) Schematic diagram of the model; (b) attenuation factor curve with $\zeta_1=0.01$; (c) attenuation factor curve with $\zeta_1=0.1$; (d) attenuation factor curve with $\zeta_1=0.5$

表 3 图6中机构超材料的几何以及材料参数

Table 3 Geometry and material parameters of the mechanism-based metamaterial in Figure 6

材料参数	几何参数
外框质量 m_1	0.1 kg
圆盘质量 m_2	0.3 kg
圆盘转动惯量 J_2	$1.1 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$
弹簧刚度 k_1	140.0 N/m
弹簧刚度 k_2	112.0 N/m
弹簧刚度 k_3	140.0 N/m

参数.

考虑到引入阻尼耗散的超材料中传播的波在空间上呈现衰减形式, 令归一化波矢为: $qh=\text{Re}(qh)+\text{Im}(qh)\mathbf{i}$. 其中, $\text{Re}(qh)$ 和 $\text{Im}(qh)$ 分别代表波的传播和衰减部分. 在图6机构超材料中, 传播的波会通过两种方式衰减: 一个是内部谐振子的反向谐振; 另一个是内部阻尼带来的耗散. 接下来, 通过计算系统的衰减因子, 即频散关系中波数的虚部, 对波衰减情况进行评估, 进而指导对在超材料设计中引入的阻尼系数进行优化选择. 本文计算了上述含有机构位移以及耗散的超材料在不同内部平动阻尼和转动阻尼情况下频散曲线的虚部, 结果如图6(b)~(d)所示. 外框之间的基体阻尼不在考虑范围, 因此 $c_3=0$. 谐振胞元的内部阻尼系统, 即内部平动和转动阻尼系数, 均采用无量纲表示, 分别为 $\zeta_1=c_1/(k_1m_2)^{1/2}$ 和 $\zeta_r=c_r/(k_2J_2)^{1/2}R$. 如图6(b)所示, 当内部无量纲平动阻尼系数 ζ_1 为0.01时, 实线代表的无量纲转动阻尼系数很微弱($\zeta_r=0.01$)时的衰减系数曲线, 可以形成与禁带区域很好对应的两个弹性波衰减区域. 当无量纲转动阻尼系数 ζ_r 增大到0.1时, 可以发现一个非常有趣的现象, 即在两个禁带之间的通带中出现了不为零的衰减因子, 也就是该通带中传播的弹性波出现了一定的衰减. 进一步增大无量纲转动阻尼系数至 $\zeta_r=0.5$ 时, 该通带中传播的波衰减因子进一步增大, 几乎使相邻两个禁带对应的两个弹性波衰减区域合并成一个. 所以, 逐渐增大的内部转动阻尼可以帮助含机构运动模式的超材料实现连续、宽带的阻波功能. 但是, 由于内部阻尼会对谐振子的反向谐振作用产生抑制效果, 使得原本两个禁带处弹性波的衰减效果不同程度地减弱. 此外, 图6(b)~(d)中每一个衰减因子曲线都会在无量纲角频率为2.45之上出现不为零的波矢虚部, 这对应着超材料的截止频率. 对比图6(b)~(d)中的实线可以发现, 增加 ζ_1 同样会增大相邻两个禁带间的波衰减因子. 值

得注意的是, 与增加 ζ_r 的结果不同, ζ_1 的增加会使高频弹性波产生衰减, 甚至阻隔第二个禁带之上通带中的传播波. 但是, ζ_1 的增加对频率较低区域弹性波的衰减效果改变相对较不明显. 这也就是说, 当阻波目标为频率较低(第二禁带以下)的区域时, 较大的无量纲内部平动阻尼系数 ζ_1 是不必要的. 综上所述, 需要选择较小的谐振子内部无量纲平动阻尼系数 ζ_1 , 并配以合适的内部无量纲转动阻尼系数 ζ_r , 以实现宽低频的弹性波抑制效果.

为了定量说明上述耗散系统中, 含机构位移模式的谐振子反向谐振和内部阻尼耗散是如何耦合并产生连续、宽带的弹性波衰减区域的, 考虑如图7(a)所示的等效系统. 其中, 含机构位移模式和内部平动/转动阻尼的谐振子可以被等效为一个等效质量 m_{eff} 和一个接地的等效超阻尼系数 c_{eff} . 等效后的耗散系统中, 第 n 个胞元的控制方程为

$$m_{\text{eff}}\ddot{u}_1^n + k_3(2u_1^n - u_1^{n-1} - u_1^{n+1}) + c_3(2\dot{u}_1^n - \dot{u}_1^{n-1} - \dot{u}_1^{n+1}) + c_{\text{eff}}\ddot{u}_1^n = 0. \quad (7)$$

通过代入简谐解和引入Bloch边界条件, 并考虑等效质量为实数的要求, 可以计算得:

$$\begin{cases} m_{\text{eff}} = \text{Re}\left[\frac{2(k_3 + i\omega c_3)(1 - \cos(qh))}{\omega^2}\right], \\ c_{\text{eff}} = \text{Im}\left[\frac{-2(k_3 + i\omega c_3)(1 - \cos(qh))}{\omega}\right]. \end{cases} \quad (8)$$

通过这种方法, 可以将由等效负质量和等效超阻尼造成的弹性波衰减进行解耦分析. 通过计算在不同内部转动阻尼系数情况下的无量纲等效质量和无量纲等效超阻尼系数, 得到相应的结果, 如图7(b), (c)所示. 总的来讲, 传播波在合并后的衰减带中通过阻波和吸波两种方式衰减.

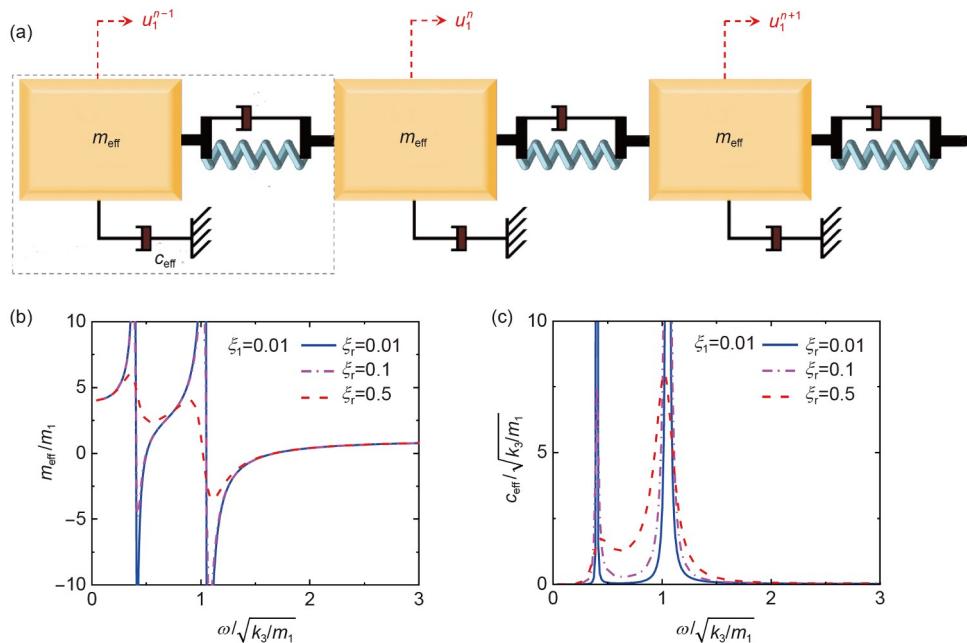


图 7 (网络版彩色)等效的机构超材料. (a) 模型示意图; (b) $\xi_r=0.01$ 时等效质量曲线; (c) $\xi_r=0.01$ 时等效超阻尼系数曲线

Figure 7 (Color online) The equivalent mechanism-based metamaterial. (a) Schematic diagram of the model; (b) effective mass curve with $\xi_r=0.01$; (c) effective meta-damping factor curve with $\xi_r=0.01$

在两个谐振禁带范围附近的波衰减整体表现为阻波, 当内部转动阻尼很微弱时($\xi_r=0.01$), 等效质量在两个禁带对应的频率范围内为负值(实线), 说明谐振子的反向谐振是造成这两个频率范围弹性波衰减的主要原因. 相对应地, 等效超阻尼系数在两个局域谐振频率附近为非常大的值, 而在其他频率则接近于0. 这种现象表明, 在局域谐振频率附近, 基体中传播的弹性波能量首先被储存在谐振子中, 作为后者的反向谐振能量. 然后, 该能量一部分对基体中的波做负功, 整体表现为隔波效果. 如图7(b)所示, 当 ξ_r 增大到0.1时, 第二个禁带对应的频率区域内的等效质量仍然是一个很大的负值, 而第一个禁带对应的频率区域内的等效质量虽仍然是负值, 但是其绝对值大小比之前大大降低, 而两个禁带之间的区域内等效质量仍是正值. 这意味着, 谐振子内部转动阻尼的存在会抑制谐振子反向谐振, 使得由谐振带来的整体隔波效果随之减弱.

在两个谐振禁带间频率范围内的波衰减整体表现为吸波, 如图7(c)所示. 在两个禁带之间的频率范围内, 等效超阻尼系数随着内部转动阻尼系数的增加产生了极大增强. 在此种情况下, 传播的弹性波能量在发生机构位移模式时由内部阻尼有效地耗散掉了, 使得设计的超材料可以实现将两个禁带合并, 进而实现宽频阻

波. 综上所述, 可以通过含机构位移模式的谐振微结构阻尼设计, 利用隔波和吸波两种机制使谐振子的反向谐振运动对基体中传播的弹性波产生连续、宽带的衰减效果.

上述波动分析都是针对无限长超材料开展的, 下面将对有限长含阻尼局域谐振机构超材料进行研究, 分析其振动特性. 基于上文中的参数分析, 为了取得更好的抑振效果, 重新设计了系统弹簧以及阻尼参数. 其中, 弹簧刚度 k_1 、 k_2 、 k_3 分别取112.0、280.0、140.0 N/m, 圆盘平动阻尼系数 ξ_1 取0.01, 圆盘转动阻尼系数 ξ_r 取0.5.

对常规局域谐振超材料、局域谐振机构超材料(含机构运动模式)以及耗散型局域谐振机构超材料(含内部阻尼与机构运动模式)分别进行了计算. 3种有限长的超材料都含有30个胞元, 如图8(a)所示. 在超材料的左侧施加简谐力作为激励, 右侧则是固定边界. 然后, 在无量纲化的频率范围 $\omega/(k_3/m_1)^{1/2}=(0, 3)$ 内, 通过扫频计算出相应的频率响应函数(frequency response function, FRF), $FRF = 20\log(u_1^{30}/u_1^1)$. 其中, u_1^j 是第 $j=1$ 到 $j=30$ 个胞元的外框位移. 图8(b)显示了3种有限长超材料的FRF曲线. 可以看出, 不含阻尼的机构超材料FRF曲线(点线)有两个谷, 对应着多重谐振(谐振结构的平动谐

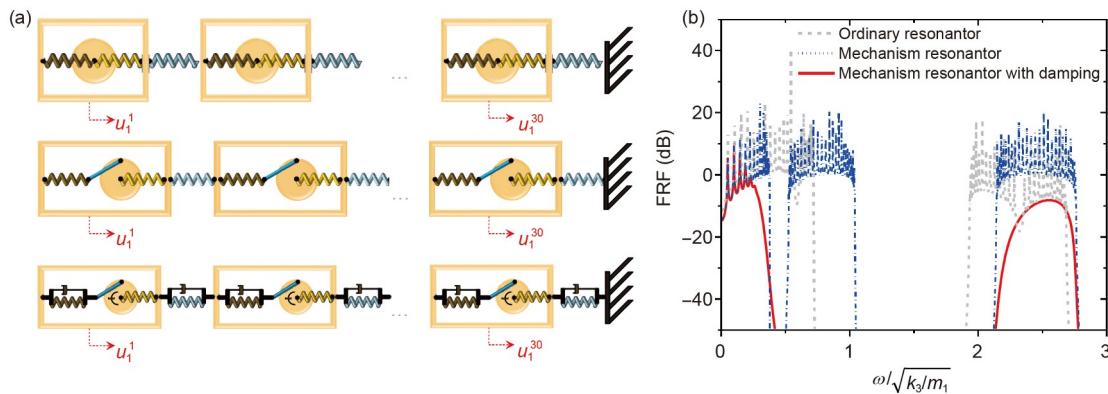


图 8 (网络版彩色)3种有限长超材料抑振效果对比. (a) 3种超材料示意图; (b) 3种有限超材料的FRF曲线对比

Figure 8 (Color online) Comparison of the vibration suspension results obtained from the three finite-length metamaterials. (a) Schematic diagram of the three metamaterials; (b) FRF curves of the three finite metamaterials

振与旋转谐振)产生的两个禁带, 验证了机构位移模式的引入可以实现多频段抑振. 通过将含阻尼的机构超材料的FRF曲线(实线)和不含阻尼的机构超材料的FRF曲线(点线)对比, 可以发现内部阻尼引入确实可以很好地抑制两个禁带间通带中的振动, 并可通过逐步增加阻尼系数实现两个禁带的合并, 从而产生连续、宽带的抑振效果. 通过定义FRF曲线在-20 dB以下为有效隔振区域, 定量地测得含阻尼的机构超材料的有效隔振频率范围为(0.34, 2.25), 而常规局域谐振超材料的有效隔振频率范围为(0.72, 1.93). 所以, 在不改变谐振质量和弹簧刚度的情况下, 引入机构位移模式和内部阻尼可以使局域谐振超材料的隔振下界频率降低53%, 同时使隔振频率范围增大58%.

4 总结

本研究通过将机构位移模式引入局部谐振微结构中, 探索增强局部微结构与材料整体超低频波动强耦合的机理, 进而提高超材料对宽低频波动的调控能力. 设计了一种由连杆转盘机构相连而成的超材料, 研究了其频散关系的计算方法, 并探索了其产生的零频禁带的物理机制. 通过将前面一维的连杆机构拓展到二维, 研究实现了具有零频各向异性负刚度的二维超材料及其波动特性. 通过将此种机构引入局域谐振系统中, 研究了在不增加质量的前提下, 实现超材料的低频多级谐振. 通过对内部阻尼进行设计, 分析了实现由谐振和耗散共同作用产生宽低频禁带的方法.

参考文献

- 1 Fang N, Xi D, Xu J, et al. Ultrasonic metamaterials with negative modulus. *Nat Mater*, 2006, 5: 452–456
- 2 Huang H H, Sun C T. Theoretical investigation of the behavior of an acoustic metamaterial with extreme Young's modulus. *J Mech Phys Solids*, 2011, 59: 2070–2081
- 3 Cheng Y, Xu J Y, Liu X J. Broad forbidden bands in parallel-coupled locally resonant ultrasonic metamaterials. *Appl Phys Lett*, 2008, 92: 051913
- 4 Liu Z, Zhang X, Mao Y, et al. Locally resonant sonic materials. *Science*, 2000, 289: 1734–1736
- 5 Huang H H, Sun C T, Huang G L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. *Int J Eng Sci*, 2009, 47: 610–617
- 6 Yao S, Zhou X, Hu G. Experimental study on negative effective mass in a 1D mass-spring system. *New J Phys*, 2008, 10: 043020
- 7 Liu Z, Chan C T, Sheng P. Analytic model of phononic crystals with local resonances. *Phys Rev B*, 2005, 71: 014103
- 8 Huang H H, Sun C T. Wave attenuation mechanism in an acoustic metamaterial with negative effective mass density. *New J Phys*, 2009, 11: 013003
- 9 Yu D, Liu Y, Wang G, et al. Flexural vibration band gaps in Timoshenko beams with locally resonant structures. *J Appl Phys*, 2006, 100: 124901
- 10 Zhao W J, Wang Y T, Zhu R, et al. Isolating low-frequency vibration via lightweight embedded metastructures (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2020, 50: 090010 [赵伟佳, 王倚天, 朱睿, 等. 轻质嵌入式超结构的低频抑振研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 090010]
- 11 Li D T, Huang S B, Mo F S, et al. Low-frequency broadband absorbers based on coupling micro-perforated panel and space-curling chamber (in Chinese). *Chin Sci Bull*, 2020, 65: 1420–1427 [李东庭, 黄思博, 莫方朔, 等. 基于微穿孔板和卷曲背腔复合结构的低频宽带吸声体. 科学通报,

- 2020, 65: 1420–1427]
- 12 Zhu R, Liu X N, Hu G K, et al. Negative refraction of elastic waves at the deep-subwavelength scale in a single-phase metamaterial. *Nat Commun*, 2014, 5: 5510
 - 13 Ambati M, Fang N, Sun C, et al. Surface resonant states and superlensing in acoustic metamaterials. *Phys Rev B*, 2007, 75: 195447
 - 14 Zhu R, Yasuda H, Huang G L, et al. Kirigami-based elastic metamaterials with anisotropic mass density for subwavelength flexural wave control. *Sci Rep*, 2018, 8: 483
 - 15 Nassar H, Xu X C, Norris A N, et al. Modulated phononic crystals: Non-reciprocal wave propagation and Willis materials. *J Mech Phys Solids*, 2017, 101: 10–29
 - 16 Li J, Shen C, Zhu X, et al. Nonreciprocal sound propagation in space-time modulated media. *Phys Rev B*, 2019, 99: 144311
 - 17 Milton G W, Willis J R. On modifications of Newton's second law and linear continuum elastodynamics. *Proc R Soc A-Math Phys Eng Sci*, 2007, 463: 855–880
 - 18 Liu X N, Hu G K, Huang G L, et al. An elastic metamaterial with simultaneously negative mass density and bulk modulus. *Appl Phys Lett*, 2011, 98: 251907
 - 19 Zhu R, Huang G L, Huang H H, et al. Experimental and numerical study of guided wave propagation in a thin metamaterial plate. *Phys Lett A*, 2011, 375: 2863–2867
 - 20 Wang P, Casadei F, Kang S H, et al. Locally resonant band gaps in periodic beam lattices by tuning connectivity. *Phys Rev B*, 2015, 91: 020103
 - 21 Chen Y, Hu G, Huang G. A hybrid elastic metamaterial with negative mass density and tunable bending stiffness. *J Mech Phys Solids*, 2017, 105: 179–198
 - 22 Wang P, Casadei F, Shan S, et al. Harnessing buckling to design tunable locally resonant acoustic metamaterials. *Phys Rev Lett*, 2014, 113: 014301
 - 23 Oh J H, Qi S, Kim Y Y, et al. Elastic metamaterial insulator for broadband low-frequency flexural vibration shielding. *Phys Rev Appl*, 2017, 8: 054034
 - 24 Zhang M, Yang J, Zhu R. Origami-based bistable metastructures for low-frequency vibration control. *J Appl Mech*, 2021, 88: 051009
 - 25 Fang X, Wen J, Yin J, et al. Broadband and tunable one-dimensional strongly nonlinear acoustic metamaterials: Theoretical study. *Phys Rev E*, 2016, 94: 052206
 - 26 Fang X, Wen J, Bonello B, et al. Ultra-low and ultra-broad-band nonlinear acoustic metamaterials. *Nat Commun*, 2017, 8: 1288
 - 27 Cveticanin L, Zukovic M. Negative effective mass in acoustic metamaterial with nonlinear mass-in-mass subsystems. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2017, 51: 89–104
 - 28 Huang G L, Sun C T. Band gaps in a multiresonator acoustic metamaterial. *J Vib Acoust*, 2010, 132: 031003
 - 29 Huang S, Zhou Z, Li D, et al. Compact broadband acoustic sink with coherently coupled weak resonances. *Sci Bull*, 2020, 65: 373–379
 - 30 Pai P F, Peng H, Jiang S. Acoustic metamaterial beams based on multi-frequency vibration absorbers. *Int J Mech Sci*, 2014, 79: 195–205
 - 31 Chen Y Y, Barnhart M V, Chen J K, et al. Dissipative elastic metamaterials for broadband wave mitigation at subwavelength scale. *Compos Struct*, 2016, 136: 358–371

Summary for “含机构位移模式的超材料低频宽带波动控制”

Mechanism-based metamaterials for low-frequency broadband wave control

Yitian Wang^{1,2†}, Jianlei Zhao^{1†}, Mingkai Zhang¹, Rui Zhu^{1*} & Gengkai Hu¹

¹ Department of Mechanics, School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

² Beijing Institute of Spacecraft System Engineering, Beijing 100094, China

† Equally contributed to this work

* Corresponding author, E-mail: ruizhu@bit.edu.cn

Metamaterials with artificial microstructures possess negative dynamic effective properties that natural materials are unable to achieve, which greatly extend the design space of next generation materials and provide various new ideas for the control of low-frequency elastic waves. Comparing with the Bragg scattering-based phononic crystals, elastic metamaterials can have extremely low-frequency bandgap that stops long-wavelength wave propagation. Simple mass-spring models can clearly explain the local resonance mechanism which introduces a negative effective mass density inside the band gap region. However, microstructure-based metamaterials rely on the local resonators and therefore, are usually confronted with the problems of narrow working bandwidth and fixed working frequency, which seriously restrict the application of elastic metamaterials in various engineering fields where structures with simultaneous lightweight and low-frequency vibration or wave controllability are much appreciated. Although the multi-resonator designs can enlarge the band gap region but it sacrifices the overall weight of the structure to achieve the desired broadband purpose. Mechanisms, which are collections of stiffer elements linked by flexible hinges that permit desired local deformation with zero potential energy, have proven to be the essential elements for the rational design of lightweight systems with novel functions and therefore, are particularly suitable for low frequency wave control.

In this work, by introducing internal mechanism into the unit cells of elastic metamaterials, a new type of mechanism-based metamaterial is proposed. Firstly, a metamaterial consisting of springs, masses and disc-linkage mechanisms is designed to realize zero-frequency negative stiffness which contributes to the formation of a ultra-wide band gap starting from the quasi-static frequency to a cut-off frequency. Furthermore, a two-dimensional metamaterial consisting of springs, masses and double disc-linkage mechanisms is designed and bi-anisotropy, simultaneously anisotropic mass density and anisotropic modulus, are realized for the first time. Finally, by introducing both internal mechanism and internal damping into the spring-mass metamaterial, low-frequency broadband vibration isolation is realized without increasing the overall mass of the system. The advantage of the design over other multi-resonator designs are: Both translational and rotational resonances of the unit cell consisting of internal mechanism are utilized to generate two band gaps without additional resonant masses, while the damping in the unit cell provides the necessary dissipation to attenuate the waves in the pass band between the two band gaps and eventually, creates a continuous, wide wave attenuation zone. Both theoretical analyses and numerical simulations are carried out to study the physical mechanism behind the coupling effect of the local mechanism movements and the global wave propagations.

Comparing with microstructure-based metamaterials, the proposed mechanism-based metamaterials possess the advantage of broadband control of the low-frequency wave and vibration in lightweight engineering structures. The mass-spring-internal mechanism model also provides a powerful platform for studying abnormal elastic wave propagations in the low frequency region. The zero-frequency negative stiffness can be useful to realize extremely low frequency wave control and meta-damping while the bi-anisotropy properties are very critical for the interesting unidirectional wave propagation and super-resolution elastic wave imaging for the structural health monitoring and the non-destructive evaluation purposes.

metamaterial, low-frequency vibration isolation, internal mechanism, negative effective stiffness, bi-anisotropy

doi: [10.1360/TB-2021-0518](https://doi.org/10.1360/TB-2021-0518)